TREBALL DE FI DE GRAU

Grau en Matemàtiques

Títol: Irresolubilitat d'un problema d'àlgebra lineal

Autor: Oriol Vall Dellavalle

Director: Enric Ventura Capell

Departament: Departament de Matemàtiques

Convocatòria: 2019-2020

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Universitat Politècnica de Catalunya
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Grau en matemàtiques

Treball de fi de grau

Irresolubilitat d'un problema d'àlgebra lineal

Oriol Valls Dellavalle

Supervisat per Enric Ventura Capell

Juny, 2020

A tota la meva família i amics, per acompanyar-me i donar-me sempre suport durant tot aquest procés, en especial als meus pares, per estar sempre amb mi i sempre donar-me ànims.

A l'Enric Ventura, director d'aquest treball, per oferir-lo i proporcionar-me totes les eines necessàries per realitzar-lo, i per tenir paciència amb tots els problemes que van sorgir.

Abstract

The aim of this thesis is to explicitly find a subgroup of the matrices $4x4$ such that, given 2 vectors u and v, it is not possible to decide the existence or not of an matrix A of the subgroup such that $Au = v$, a problem that might seem like a linear algebra problem but ends up being much more complicated. This result is based on an article by O. Bogopolski, A. Martino and E. Ventura where the existence of a subgroup with the properties we want was proved. From this result and from an explicit group given by Collins, and following the calculations made in the different articles cited in the references, we can find and list the desired matrices.

Keywords: Free group, Free product, HNN extension, Tietze transformation, Word problem, Membership problem, Orbit decidability problem

Resum

L'objectiu d'aquest treball és trobar explícitament un subgrup de les matrius $4x4$ al que, 2 vectors u i v qualsevols, no es pot decidir l'existència o no d'una matriu A del subgrup tal que $Au = v$, un problema que podria semblar d'àlgebra lineal però que acaba sent molt més complicat. Aquest resultat es basa en un article de O. Bogopolski, A. Martino i E. Ventura on es va demostrar l'existència d'un subgrup amb les propietats que volem. A partir d'aquest resultat i d'un grup explícit donat per Collins, i resseguint els càlculs realitzats en els diferents articles citats a les referències, podem trobar i llistar les matrius desitjades.

Paraules Clau: Grup lliure, Producte lliure, Extensions HNN, Transformacions de Tietze, Word problem, Membership problem, Orbit decidability problem

Índex

1. Introducció

1.1 Grups lliures

Donat S un subconjunt d'un grup F, es diu que S és una base lliure de F si cada aplicació $\varphi : S \to G$ del subconjunt S a un grup qualsevol G es pot extendre de manera única a un homomorfisme $\widetilde{\varphi} : F \to G$ tal que $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi(s)\ \forall s \in S$.
Un grup F es diu que és un grup lliure si conté algun subconjunt que és una base lliure de F.

Per exemple, sigui C el grup cíclic multiplicatiu generat per un element a, que consisteix en totes les potències d'aquest element a, és a dir

$$C = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a, a^1, a^2, \dots\}$$

amb la multiplicació definida per $a^i \cdot a^j = a^{i+j}\ \forall i, j \in \mathbb{Z}$. Aleshores, C és un grup lliure, on una base lliure ve donada pel subconjunt d'un sol element $S = \{a\}$. Donada una aplicació $\varphi : S \to H$, prenem $\varphi(a) = h \in H$ i φ es pot extendre a un homomorfisme $\widetilde{\varphi} : C \to H$ definint $\widetilde{\varphi}(a^i) = h^i$. A més, és clar que aquesta és l'única manera d'extendre φ a un homomorfisme. Ovservem que C té una altre base lliure, el subconjunt format per l'element $\{a^{-1}\}$ i que aquestes són les dues úniques bases lliures de C. Per exemple, $S' = \{a^2\}$ no és una base lliure de C, ja que si prenem un morfisme $\varphi' : S' \to \mathbb{Z}$ tal que $\varphi'(a^2) = 1$ no el podem exendre a un morfisme $\widetilde{\varphi}' : C \to \mathbb{Z}$ tal que $\widetilde{\varphi}'(a^2) = 1$.

A part d'aquest exemple, podem demostrar que els grups lliures existeixen construint un grup lliure per qualsevol conjunt S donat com a base.

Teorema 1. *Sigui S un conjunt qualsevol, aleshores existeix un únic grup lliure F_S (llevat d'isomorfisme) que té S com a base lliure.*

Donat S un conjunt que ens podem prendre com un conjunt de símbols, que no té perquè ser numerable ni ordenat. Anomenarem *paraula* sobre S a una expressió de la forma $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_k^{\varepsilon_k}$ on $\varepsilon_i = \pm 1$ i $a_i \in S$ (els a_i no tenen perquè ser diferents entre ells). És a dir una paraula és una seqüència finita d'elements de S amb exponents $+1$ o bé -1. La idea és que a^{+1} i a^{-1} seràn elements inversos entre ells dins el futur grup, i, per simplificar la notació, denotem a^{+1} per a.

En alguns casos, ens pot interessar expressar aquestes paraules amb una notació una mica diferent. Sigui $S^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in S\}$ el conjunt dels símbols inversos de S. Aleshores una paraula de S es pot prendre com una seqüència finita de símbols de $S \cup S^{-1}$. Usarem la notació que ens convingui més depenent del cas en què ens trobem, ja que usar qualsevol de les dues no provoca confusions.

Una paraula d'un conjunt S es diu que està *reduïda* si no conté cap subparaula (una seqüència consecutiva) formada per elements de la forma aa^{-1} o $a^{-1}a$, subparaules que s'anomenen *parelles inverses* de generadors. Si una paraula ω conté una parella inversa, és a dir, sigui $\omega \equiv uaa^{-1}v$ on u i v són subparaules, aleshores qualsevol grup que contingui ω haurà de complir $\omega = uv$. A l'eliminar una parella inversa, diem que els símbols a i a^{-1} es *cancel·len*.

Donada una paraula ω, si cancel·lem successivament totes les parelles inverses que conté, en un nombre finit de passos arribem a una paraula reduïda ω', que anomenem *forma reduïda* de ω. Podríem arribar a aquesta forma reduïda de diferents formes segons en l'ordre que fem les cancel·lacions, però el resultat de ω' no depen de l'ordre que utilitzem, fet que ens permetrà anomenar a ω' *la* forma reduïda de ω i escriure-la com $\omega' = \eta(\omega)$.

Lema 1. *Donada ω una paraula en S, aquesta té una única forma reduïda.*

Demostració. Sigui $x \in S \cup S^{-1}$, i x^{-1} el seu invers. Farem una demostració per inducció sobre la longitud de ω com a seqüència de símbols. Si ω és una paraula reduïda, ja hem acabat. Si no, sigui $\omega \equiv uxx^{-1}v$, ens centrem en aquesta parella inversa xx^{-1} que conté ω. Si demostrem que qualsevol paraula reduïda ω' de ω es pot obtenir cancel·lant primer aquesta parella reduïda primer, aleshores el lema ja estarà demostrat per inducció a la paraula obtinguda d'aquesta cancel·lació uv, que és més curta que ω.

Sigui ω' una forma reduïda de ω. Sabem que podem obtenir ω' amb alguna seqüència de cancel·lacions de parelles inverses. Suposem primer que la parella en la qual ens estavem centrant xx^{-1} es cancel·la en algun pas de la seqüència. Aleshores, podem reordenar els passos de manera que xx^{-1} es cancel·li la primera, i en aquest cas ja hem acabat. En cas contrari, com que ω' és una paraula reduïda i, per tant, xx^{-1} no pot estar contigut en ella, almenys un dels dos símbols s'ha d'eliminar en algun pas. La primera cancel·lació serà d'una de les següents maneres: $u_1x^{-1}xx^{-1}v_1 \to u_1\cancel{x^{-1}x}x^{-1}v_1$ o bé $u_2xx^{-1}xv_2 \to u_2x\cancel{x^{-1}x}v_2$. Però, en qualsevol dels dos casos la paraula que obtenim és la mateixa que hauríem obtingut cancel·lant la parella inicial, i per tant podríem cancel·lar aquella parella en aquest pas. Per tant, ens tornem a trobar en el primer cas, i ja hem acabat. $\square$

Ara, ja podem definir un grup lliure F_S per cada base lliure donada S.

Demostració del Teorema 1. Els elements del grup F_S seran les paraules reduïdes en S, on l'element neutre serà la paraula buida que denotarem per 1. La multiplicació de paraules de F_S la definirem com $u \cdot v = \eta(uv)$, és a dir, el producte de dues paraules ve donat per la reducció lliure de la concatenació de les dues paraules. Ara, necessitem veure que es compleixen els axiomes necessaris per a que F_S sigui un grup. L'element neutre és, com hem dit, la paraula buida 1, i l'invers d'un element qualsevol $a_1^{\epsilon_1}a_2^{\epsilon_2}\cdots a_k^{\epsilon_k}$ és l'element $a_k^{-\epsilon_k}a_{k-1}^{-\epsilon_{k-1}}\cdots a_1^{-\epsilon_1}$. La propietat associativa es compleix degut a que reduïr una paraula és independent de l'ordre en què les parelles inverses es cancel·len.

Per veure que F_S és un grup lliure amb base S, prenem una aplicació $\varphi : S \to G$ amb G un grup qualsevol, i definim

$$\widetilde{\varphi}(a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_k^{\varepsilon_k}) = \varphi(a_1)^{\varepsilon_1}\varphi(a_2)^{\varepsilon_2}\cdots\varphi(a_k)^{\varepsilon_k}$$

Observem que aquesta aplicació $\widetilde{\varphi}$ és clarament un morfisme i, a més, degut a la definició del mateix és l'únic morfisme que exten la funció φ. Per tant, F_S és un grup lliure amb base S.

Vejem ara que F_S és únic. Per fer-ho, suposem que existeix un altre F'_S lliure sobre S. Com que F_S és un grup lliure sobre S, tota $\varphi_F : S \to G$ a un grup qualsevol G es pot extendre de manera única a un morfisme $\widetilde{\varphi_F} : F \to G$. Prenem $G = F'_S$, i anomenem α al morfisme que exten l'aplicació de la definició. De la mateixa manera, com que F'_S és un grup lliure sobre S, qualsevol aplicació $\varphi_{F'} : S \to G$ a un grup qualsevol G s'exten de manera única a un morfisme $\widetilde{\varphi_{F'}} : F' \to G$. Prenem ara $G = F$ i anomenem β al morfisme que exten l'aplicació. Per tant, tenim que $\alpha \circ \varphi_F = \varphi_{F'}$ i que $\beta \circ \varphi_{F'} = \varphi_F$. Per tant:

$$\beta \circ \alpha \circ \varphi_F = \beta \circ \varphi_{F'} = \varphi_F$$

$$\alpha \circ \beta \circ \varphi_{F'} = \beta \circ \varphi_F = \varphi_{F'}$$

Tornant a la definició de que F_S és grup lliure sobre S i prenent en aquest cas $G = F$, existeix un únic morfisme que exten l'aplicació φ_F a un morfisme $\psi : F_S \to F_S$ que és, naturalment, la identitat. Però $\beta \circ \alpha$ també és un morfisme $\beta \circ \alpha : F_S \to F_S$ que exten l'aplicació de la definició, i com que el morfisme és únic, tenim que $\beta \circ \alpha = Id$. Anàlogament, podem veure que $\alpha \circ \beta = Id$, i per tant F_S i F'_S són isomorfs.

$\square$

Per simplificar la notació en els grups lliures agruparem els símbols que apareixin consecutivament dins les paraules reduïdes com a $a_1^{n_1} a_2^{n_2} \dots a_r^{n_r}$ on els exponents n_i són exponents enters no nul·ls i dos símbols consecutius seran sempre diferents.

Teorema 2. *Tot grup és isomorf a un quocient d'un grup lliure. És a dir, per tot grup G existeix un grup lliure F i un subgrup normal N tal que $G \cong F/N$.*

Demostració. Donat un grup G, prenem primer G com a un conjunt, i formem el grup lliure F_G com haviem fet anteriorment. Aleshores, l'aplicació identitat $\varphi : G \to G$ que envia el conjunt G al grup G s'exten de manera única a un morfisme $\widetilde{\varphi} : F_G \to G$. Aquest morfisme és exhaustiu, ja que φ és una bijecció, i per tant $G \cong F_G/N$, on $N = ker(\widetilde{\varphi})$, que és un subgrup normal per ser el nucli del morfisme. $\square$

En general, donat S un subconjunt d'un grup G, anomenarem $\langle S \rangle$ al subgrup generat per S, i $\ll S \gg$ al subgrup normal generat per S. Anomenarem *rang* d'un grup lliure F_S al cardinal del conjunt S de generadors. Podem veure que el rang d'un grup lliure està ben definit mitjançant el següent teorema:

Teorema 3. *Si F_n és isomorf a F_m, aleshores $m = n$.*

Demostració. Sigui S una base lliure de F_n. Qualsevol aplicació $\varphi : S \to G$ a un grup qualsevol s'exten de manera única a un morfisme $\widetilde{\varphi} : F_n \to G$. Prenent $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tenim que el nombre de morfismes entre F_n i $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ és igual al nombre d'aplicacions entre S i $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, que és 2^n, ja que $|S| = n$. De la mateixa manera, prenent T una base lliure de F_m, aquesta base tindrà m elements i, per tant, el nombre de morfismes entre F_m i $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ serà 2^m. Per tant, com que $F_n \cong F_m$, tenim que $2^n = 2^m$, i per tant $n = m$. $\square$

1.2 Presentació d'un grup

Donat un grup G, una presentació és una forma de descriure aquest grup a través de dos conjunts:

- S, el conjunt de generadors del grup, de forma que qualsevol element del grup pugui ser expressat com a producte dels elements de S.

- R, el conjunt de relacions, un conjunt d'igualtats entre els elements del grup.

D'aquesta manera, la presentació del grup s'escriu de la forma $G = \langle S \mid R \rangle$. En les relacions, si el segon membre de la igualtat és l'element neutre, aquest es sol ometre així com la igualtat, com es pot veure en el següent exemple:

$$G = \left\langle a, b, c \mid b^5, cbc^{-1}b^{-1} \right\rangle$$

Aquest exemple indica que G estaria generat pels elements a, b, c, que b és un element d'ordre 5, $b^5 = 1$, i que els elements b i c commuten $cb = bc$.

Formalment, donada una presentació $P = \langle S \mid R \rangle$ el grup presentat per P, anomenat $pg(P)$, és el grup F_S/N_R, on F_S és el grup lliure que té com a base lliure S i N_R és la clausura normal de R dins F_S, és a dir, el subgrup normal més petit que conté R. D'aquesta manera, si $r \in R$, aleshores $r \in N_R$, i per tant $r =_{pg(P)} 1$. Si $G = pg(P)$, farem un abús de notació i escriurem $G = \langle S \mid R \rangle$ si no és necessari distingir entre el grup i la seva descripció.

Una presentació $P = \langle S \mid R \rangle$ és finitament generada si S és un conjunt finit, i finitament relacionada si R és un conjunt finit. Si tant S com R són conjunts finits, direm que P és una presentació finita o que el grup està finitament presentat.

Sigui $S = \{a_1, a_2, ...\}$ i $R = \{r_1, r_2, ...\}$ usarem les següents notacions per descriure el grup:

$$P = \langle a_1, a_2, ... \mid r_1 = 1, r_2 = 1, ... \rangle$$

o bé

$$P = \langle a_1, a_2, ... \mid r_1, r_2, ... \rangle$$

usat per simplificar el primer cas. També podriem utilitzar la següent notació

$$P = \langle a_1, a_2, ... \mid u_1 = v_1, u_2 = v_2, ... \rangle$$

si les relacions són més simples d'aquesta manera. En aquest cas, tindriem que $r_i = u_i v_i^{-1}$.

Donarem a continuació uns exemples de presentacions de grups:

1. Un grup lliure F_S que té S com a base lliure vindrà presentat per $F_S = \langle S \mid - \rangle$.

2. Un grup C_n cíclic finit d'ordre n té com a presentació $C_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$.

3. Un grup abelià de rang 2 té com a presentació $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$ o, equivalentment, $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} = 1 \rangle$.

4. Qualsevol grup finit G té una presentació finita. En aquest cas, podem prendre com a conjunt de generadors tots els elements del grup $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, i com a relacions les diferents equacions de la taula de multiplicar del grup.

Lema 2. *Sigui $G = \langle S \mid R \rangle$ un grup donat per una presentació. Si ω és una paraula en els generadors de G, aleshores $\omega =_G 1$ si i només si és producte de conjugats de relacions i relacions inverses, és a dir si com a element del grup lliure F_S existeix una equació*

$$\omega =_{F_S} (u_1 r_{i_1}^{\epsilon_1} u_1^{-1})(u_2 r_{i_2}^{\epsilon_2} u_2^{-1}) \cdots (u_k r_{i_k}^{\epsilon_k} u_k^{-1})$$

per algunes paraules $u_i \in F_S$, $r_{i_j} \in R$, i $\epsilon_j = \pm 1$.

Demostració. Per demostrar aquest lema només cal observar que el conjunt de paraules que són iguals a aquestes expressions conté el conjunt R i és tancat per conjugació, multiplicació i inversió, és a dir aquest conjunt és un subgrup normal a G. A més, qualsevol subgrup normal a G que contingui R contindrà també totes les paraules que es poden obtenir mitjançant aquestes equacions, i per tant aquest és el subgrup normal més petit que conté R. □

1.3 Ping Pong Lema

Siguin G un grup i X un conjunt. Una acció de G en X és una aplicació $G \times X \to X$, que denotarem mitjançant el producte $(a, x) \mapsto ax$, tal que, $\forall a, b \in G, x \in X$:

1. $a(bx) = (ab)x$

2. $1x = x$

Donada una acció de G en X, es diu que G opera sobre X o bé que X és un G-conjunt.

Lema 3 (Ping Pong Lema (2))**.** *Sigui G un grup generat per a i b actuant sobre el conjunt X. Si:*

1. *X té dos subconjunts disjunts i no buits X_a i X_b i*
2. *$a^k X_b \subset X_a$ i $b^k X_a \subset X_b$ per tota potència k no nul·la*

Aleshores G és isomorf a un grup lliure de rang 2.

Demostració. Sigui g un element de G representat per una paraula de la forma $a^{n_1} b^{m_1} a^{n_2} \cdots b^{m_r} a^{n_s}$, on n_i, m_i són tots no nuls. A més, veient que cap d'aquestes paraules és la identitat és suficient per acabar la demostració, ja que qualsevol element de $g \in G$ es pot obtenir conjugant per a (multiplicant suficients vegades per a al principi de la paraula i per a^{-1} al final) un element d'aquesta forma, i $g = 1 \iff a^n g a^{-n} = 1$. Vegem que aquesta paraula no pot ser mai la identitat:

Apliquem aquesta paraula sobre un element $x_b \in X_b$. A l'aplicar l'últim element a^{n_s} sobre x_b, com que $a^k X_b \subset X_a$, obtenim un element de X_a. Ara, apliquem la següent lletra de la paraula, b^{m_r}, sobre aquest nou element i, com que $b^k X_a \subset X_b$, obtenim un element de X_b, i seguim fent el mateix procés per totes les lletres de la paraula. Com que en la paraula totes les lletres consecutives són diferents, i la primera és una potència de a finalment obtenim un element de X_a. Per tant, la paraula no podia ser la identitat, ja que a l'aplicar la paraula sobre un element de X_b hem obtingut un element de X_a, que no pot ser l'element inicial ja que aquests dos subconjunts són disjunts. □

Exemple: Vegem un exemple d'aquest lema aplicat les matrius $GL_2(\mathbb{Z})$ actuant sobre el pla real $\mathbb{R}^2$. Recordem que $GL_2(\mathbb{Z})$ és el grup de les matrius 2×2 amb determinant igual a ± 1. En aquest cas, l'acció és la multiplicació estandard d'un element de $GL_2(\mathbb{Z})$ amb un vector columna de $\mathbb{R}^2$, que compleix les dues condicions necessaries per ser una acció. Per qualsevol enter $m \geq 2$, veurem que les matrius

$$A = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$$

generen un subgrup de $GL_2(\mathbb{Z})$ que és lliure de rang 2. Prèviament, podem veure per inducció que

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & km \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ km & 1 \end{bmatrix}.$$

Prenem ara els següents subconjunts de $\mathbb{R}^2$

$$X_A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, |x| > |y| \right\} \text{ i } X_B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \, |x| < |y| \right\}$$

Clarament els dos subconjunts són no buits i disjunts, satisfent la primera condició del lema. Vegem que també satisfan la segona:
Aplicant la matriu A^k, amb $k \neq 0$, a un element de X_B obtenim:

$$\begin{bmatrix} 1 & km \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + kmy \\ y \end{bmatrix}$$

Com que $k \neq 0$, $m \geq 2$, i $|x| < |y|$, $|x| < |my|$, i per tant:

$$|x + kmy| \geq |kmy| - |x| \geq 2\,|ky| - |x| > |ky| \geq |y|$$

i el resultat pertany a X_A. Anàlogament, a l'aplicar una matriu B^k a un element de X_A obtenim un element de X_B. Per tant, aquests conjunts satisfan les dues condicions del lema, i el subgrup generat per A i B és un grup lliure de rang 2.

1.4 Producte lliure de grups

Siguin H i K dos grups. Es diu que L és el *producte lliure* de H i K si existeixen homomorfismes $\mu_H : H \to L$ i $\mu_K : K \to L$ que satisfan la següent condició: per qualsevol parella d'homomorfismes $\alpha : H \to G$ i $\beta : K \to G$ on G és un grup qualsevol, existeix un únic homomorfisme $\gamma : L \to G$ tal que $\alpha = \gamma \circ \mu_H$ i $\beta = \gamma \circ \mu_K$. Notem el producte lliure de H i K per $H * K$.

Vejem que el producte lliure de dos grups existeix escribint-ne una presentació. Suposem que H i K venen donats per les presentacions $H = \langle A \mid R \rangle$ i $K = \langle B \mid S \rangle$. Canviant l'alfabet d'un dels dos grups si és necessari, podem suposar que S i T són disjunts, és a dir, $S \cap T = \emptyset$. Aleshores, una presentació de $H * K$ es pot obtenir unint les dues presentacions anteriors, és a dir:

$$H * K = \langle A \cup B \mid R \cup S \rangle$$

En efecte, els morfismes necessaris μ_H i μ_K són simplement els homomorfismes induïts per la inclusió dels generadors. Aleshores, donats homomorfismes α i β com a la definició, γ ve donat per $\gamma(s) = \alpha(s)$ per $s \in S$ i $\gamma(t) = \beta(t)$ per $t \in T$. Clarament, γ defineix un homomorfisme, tal com ens requeria la definició, i és l'únic possible. Per tant, $H * K$ és el producte lliure de H i K.

Vegem ara que el producte lliure de grups és únic. Suposem que L i L' són dos grups que compleixen la definició de ser el producte lliure de H i K. Al ser L el producte lliure de H i K, existeixen morfismes μ_H i μ_K complint la definició. Com que L' també és producte lliure de H i K, existeixen morfismes μ'_H i μ'_K que també satisfan la definició. Prenem ara $\mu'_H : H \to L'$ i $\mu'_K : K \to L'$ com a parella de morfismes α i β de la definició de producte lliure sobre un grup G qualsevol, en aquest cas L'. Com que L és el poducte lliure de H i K, existeix un únic morfisme $\gamma : L \to L'$ tal que $\mu'_H = \gamma \circ \mu_H$ i $\mu'_K = \gamma \circ \mu_K$. Repetint el procés sobre la definició de que L' és producte lliure de H i K, trobem que existeix un únic morfisme γ' tal que $\mu_H = \gamma' \circ \mu'_H$ i $\mu_K = \gamma' \circ \mu'_K$. Tornem ara a la definició de L com a producte lliure de H i K. Prenem aquest cop el mateix L com a grup qualsevol al que apliquem els morfismes $\mu_H : H \to L$ i $\mu_K : K \to L$. Aleshores, com que L és producte lliure d'aquests dos grups, existeix un únic morfisme ψ tal que $\mu_H = \psi \circ \mu_H$ i $\mu_K = \psi \circ \mu_K$, i observem que ψ és la identitat. Però $\gamma'\gamma\mu_H = \gamma'\mu'_H = \mu_H$ i $\gamma'\gamma\mu_K = \gamma'\mu'_K = \mu_K$. Per tant, com que aquest morfisme era únic, $\gamma' \circ \gamma = Id$. Anàlogament, aplicant aquest mateix argument sobre L' com a producte lliure de H i K, tenim que $\gamma \circ \gamma' = Id$. Per tant, $L \cong L'$ i la unicitat del producte lliure queda demostrada.

Ara, podem veure també que els morfismes μ_H i μ_K són injectius. Prenem aquest cop a la definició de L com a producte lliure H com a grup qualsevol i els morfismes $Id : H \to H$ i $1 : K \to H$ que envia tots els elements de K a l'element neutre 1. Aleshores, existeix un únic γ tal que $Id = \gamma \circ \mu_H$ i per tant μ_H inclou injectivament H dins L. Anàlogament μ_K inclou injectivament K dins L.

1.5 Transformacions de Tietze

En general, tot grup admet varies presentacions. A partir d'aquest fet, Tietze va intentar determinar quan dos grups són isomorfs a partir de l'estudi de les seves presentacions, començant amb dos grups isomorfs amb presentacions diferents i transformant-ne una per arribar a l'altre. El problema va resultar ser irresoluble, ja que aquesta cadena de transformacions pot esdevenir arbitràriament llarga i no es pot acotar a partir de la longitud de les presentacions dels grups a estudiar, però la seqüència de les transformacions va seguir sent útil per a estudiar quan dos grups són isomorfs.

Sigui $G = \langle a, b, c, \dots | r_1, r_2, \dots \rangle$. Podem obtenir diferents presentacions del grup mitjançant les anomenades *transformacions de Tietze*:

(T1) Afegir una ω tal que $\omega \in \ll r_1, r_2, \dots \gg$ al conjunt de relacions $r_1, r_2, \dots$

$$\langle a, b, c, \dots \mid r_1, r_2, \dots \rangle \sim \langle a, b, c, \dots \mid \omega, r_1, r_2, \dots \rangle$$

(T2) Si existeix una r_i que és producte de conjugats d'altres relacions o relacions inverses, suprimir la r_i de les relacions

$$\langle a, b, c, \dots \mid r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, \dots \rangle \sim \langle a, b, c, \dots \mid r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots \rangle$$

(T3) Afegir un generador t i una relació $t = \omega(a, b, c, \dots)$ sense que t aparegui en $\omega(a, b, c, \dots)$

$$\langle a, b, c, \dots \mid r_1, r_2, \dots \rangle \sim \langle t, a, b, c, \dots \mid t = \omega, r_1, r_2, \dots \rangle$$

(T4) Si existeix un generador k i una relació $k = \omega(a, b, c, \dots)$ on k no aparex en la paraula de la relació, eliminar k dels generadors i la relació $k = \omega(a, b, c, \dots)$, i substituïr k per $\omega(a, b, c, \dots)$ en totes les altres relacions on aparegui k

$$\langle k, a, b, c, \dots \mid k = \omega(a, b, c, \dots), r_1, r_2, \dots \rangle \sim \langle a, b, c, \dots \mid r_1', r_2', \dots \rangle$$

on $r_i' = r_i(\omega(a, b, c, \dots), a, b, c, \dots)$.

Teorema 4 (Tietze (4))**.** *Siguin G i H dos grups amb presentacions $G = \langle A \mid R \rangle$, $H = \langle B \mid S \rangle$. Aleshores G i H són isomorfs si i només si hi ha una seqüència de transformacions de Tietze des d'una de les presentacions a l'altre. Si, a més, aquestes dues presentacions són finites, aleshores la seqüència té un nombre finit de transformacions.*

Demostració. La implicació de dreta a esquerra és evident.
Per veure la d'esquerra a dreta, escribim les dues presentacions de la següent manera:

$$G = \langle a_1, a_2, \dots \mid r_1, r_2, \dots \rangle$$

$$H = \langle b_1, b_2, \dots \mid s_1, s_2, \dots \rangle$$

Podem suposar que l'isomorfisme entre G i H és un isomorfisme induït de les aplicacions entre els grups lliures F_A i F_B definits de la següent manera:

$$\varphi(a_i) = u_i(\vec{b}), \ i = 1, 2, \dots, \ \psi(b_j) = v_j(\vec{a}), \ j = 1, 2, \dots$$

on $u_i(\vec{b})$ és una paraula sobre els símbols $b_1, b_2, \dots$ i $v_j(\vec{a})$ és una paraula sobre els símbols $a_1, a_2, \dots$. Començant per la primera presentació, podem aplicar varies transformacions (T3) per obtenir la següent presentació:

$$\langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, | \ r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, b_1 = v_1(\vec{a}), b_2 = v_2(\vec{a}), \dots \rangle$$

Com que ψ és un morfisme, cada relació s_j segueix essent igual a 1 en aquest grup, per tant usant transformacions (T1) es poden afegir al conjunt de les relacions obtenint la següent presentació:

$$\langle a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots, | \ r_1 = 1, r_2 = 1, \dots, b_1 = v_1(\vec{a}), b_2 = v_2(\vec{a}), \dots$$

$$s_1 = 1, s_2 = 1, \dots \rangle$$

Observem ara que $\varphi \circ \psi(a_i) = a_i$, i per tant les relacions $a_i = u_i(\vec{b})$ són conseqüència del conjunt de relacions que ja tenim, per tant mitjançant transformacions (T1) les podem afegir a la presentació:

$$\langle a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, \mid r_1 = 1, r_2 = 1, \ldots .b_1 = v_1(\vec{a}), b_2 = v_2(\vec{a}), \ldots$$

$$s_1 = 1, s_2 = 1, \ldots, a_1 = u_1(\vec{b}), a_2 = u_2(\vec{b}), \ldots\rangle$$

Per altra banda, començant des de la segona presentació i fent transformacions de Tietze anàlogues, podríem haver arribat a aquesta mateixa presentació, i que mitjançant transformacions (T2) i (T4) inverses a les que hem utilitzat per arribar a aquest resultat podríem passar d'aquesta presentació a qualsevol de les dues que teniem originalment. Aquests passos els hem agrupat de manera que cada vegada afegiem tot un conjunt de generadors o relacions amb una sola transformació de Tietze que agrupava les que hauriem hagut de fer per cada generador o relació individualment. Per tant, si els dos grups haguéssin sigut finitament presentats i, per tant, haguéssin tingut un nombre finit de generadors i relacions, hauriem pogut fer aquest procediment en un nombre finit de passos. □

1.6 Extensions HNN

Sigui G un grup que ve presentat per $G = \langle A \mid R\rangle$ i siguin H i K dos subgrups isomorfs mitjançant l'isomorfisme $\varphi : H \to K$. L'objectiu d'aquest apartat és trobar un grup més gran que contingu G on els subgrups H i K siguin conjugats per un element, que realitzarà l'isomorfisme entre ells. Aconseguirem aquest grup mitjançant les *extensions de Higmann-Neumann-Neumann*, abreviat per extensions HNN, amb *subgrups associats* H i K via l'isomorfisme $\varphi : H \to K$, que es denotarà per $G*_\varphi$ i tindrà la següent presentació:

$$G*_\varphi = \langle A, t \mid R, t^{-1}ht = \varphi(h)\ \forall h \in H\rangle$$

Aquest generador adicional t s'anomena *lletra estable*. Observem que seria suficient afegir només les relacions $t^{-1}ht$ pels h que estiguin en un conjunt de generadors de H.

Com a exemple d'una extensió HNN, prenem el grup cíclic $G = \langle c \mid -\rangle$ i els subgrups $H = \langle c^2\rangle$ i $K = \langle c^3\rangle$, que són isomorfs via l'isomorfisme $c^2 \mapsto c^3$. En aquest cas, l'extensió HNN és $G*_\varphi = \langle c, t \mid t^{-1}c^2t = c^3\rangle$.

Una *t-expressió* és una seqüència de la forma

$$g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} g_2 \cdots t^{\varepsilon_m} g_m$$

on els g_i són elements de G i $\varepsilon_i = \pm 1$. Si $g_i = 1$, aleshores, a més, $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ (ja que sinó podrien aparèixer símbols t consecutius amb exponents de signe diferent, fer que faria que s'anul·lessin i que aquesta seqüència de la paraula no tingués sentit). El fet de permetre casos $g_i = 1$ permet obtenir seqüencies de la forma t^2, t^3, etc. dins la paraula. També acceptem el cas on no aparegui cap símbol t, i direm que una t-expressió *involucra* t si apareix algun símbol t o t^{-1}. Amb aquesta definició, qualsevol paraula en generadors de G pot ser vista com una t-expressió. Si en algun punt d'una t-expressió apareix una seqüència de la forma $t^{-1}g_it$ amb $g_i = h \in H$, podem aplicar la relació de la definició $t^{-1}g_it = t^{-1}ht = \varphi(h) = k \in K$ i substituïr-ho en l'expressió, de manera que obtinguem:

$$g_0 t^{\varepsilon_1} \cdots t^{\varepsilon_{i-1}} (g_{i-1} k g_{i+1}) t^{\varepsilon_{i+2}} \cdots t^{\varepsilon_m} g_m$$

que conté dos símbols t menys i representa el mateix element dins $G*_{\varphi}$. De la mateixa forma, si en algun moment apareix una seqüència tg_it^{-1} amb $g_i = k \in K$, podem aplicar la relació $tg_it^{-1} = tkt^{-1} = \varphi^{-1}(k) = h \in H$ per obtenir una expressió amb dos símbols t menys que representi el mateix element dins $G*_{\varphi}$. Qualsevol d'aquestes dues substitucions s'anomenen *t-reduccions*. Si en una t-expressió no hi ha cap t-reducció possible, aleshores es diu que està *t-reduïda*. D'aquesta manera també hem descrit una forma de t-reduïr una t-expressió.

Donada $g'_0t^{\delta_1}g'_1t^{\delta_2}\cdots t^{\delta_n}g'_n$ una altre t-expressió com l'anterior, direm que les dues expressions són *t-paral·leles* si $n = m$ i $\varepsilon_i = \delta_i$ $\forall i = 1, \dots, n$

Tornant ara a l'exemple anterior, $G*_{\varphi} = \langle c, t \mid t^{-1}c^2t = c^3\rangle$, podem veure que les paraules $c^3tc^{-5}t^{-1}$ i $ctc^{-2}t^{-1}$ són totes dues t-reduïdes. Però, si ens mirem les dues paraules dins $G*_{\varphi}$ tenim el següent resultat:

$$c^3tc^{-5}t^{-1} = c^3tc^{-3}t^{-1}tc^{-2}t^{-1} = c^3c^{-2}tc^{-2}t^{-1} = ctc^{-2}t^{-1}$$

És a dir, aquestes dues paraules representen el mateix element dins el grup $G*_{\varphi}$. Per tant, ser t-reduïdes no és prou fort per donar la forma canònica única d'una paraula.

Per solucionar aquest problema, triem primer un subconjunt *transversal* Y de les classes laterals per la dreta de H dins de G (és a dir, un subconjunt contenint un únic representant de de cada classe lateral per la dreta de H), amb la condició que el representant de H sigui 1, i de la mateixa manera triem un subconjunt transversal Z de les classes laterals per la dreta de K dins de G. Així, definim la *forma normal* com una t-expresió

$$g_0t^{\varepsilon_1}x_1t^{\varepsilon_2}x_2\cdots t^{\varepsilon_m}x_m$$

on, si $\varepsilon_i = -1$, aleshores $x_i \in Y$; si $\varepsilon_i = +1$, aleshores $x_i \in Z$ (i si $x_i = 1$, aleshores $\varepsilon_i \neq -\varepsilon_{i+1}$). D'aquesta manera, g_0 és un element arbitrari, però els elements $x_1x_2 \dots x_m$ han d'estar dins el transversal Y o Z apropiats. Amb l'última condició tenim que no hi ha parelles inverses de símbols t separades per l'element trivial. Podem observar, a més, que tota paraula en forma normal també està t-reduïda.

Ara, és necessari veure que tot element ω de $G*_{\varphi}$ ve donada per una única forma normal. Primer, aplicant el procés de reducció, podem suposar que la paraula ω està t-reduïda. Treballem de dreta a esquerra en la paraula per convertir-la a la seva forma normal. Així, podem suposar que la paraula

$$g_0t^{\varepsilon_1}g_1\cdots t^{\varepsilon_i}g_it^{\varepsilon_{i+1}}x_{i+1}\cdots t^{\varepsilon_m}x_m$$

està t-reduïda i, que a partir de l'element x_i satisfà les condicions necessaries per estar en forma normal. Si $\varepsilon_i = -1$, a G podem escriure de manera única $g_i = hy_i$ on $h \in H$ i $y_i \in Y$. Ara, en l'expressió anterior substituïm $t^{-1}g_i = t^{-1}hy_i = kt^{-1}y_i$ on $k = \varphi(h) \in K$ i obtenim

$$g_0t^{\varepsilon_1}g_1\cdots t^{\varepsilon_{i-1}}(g_{i-1}k)t^{-1}y_it^{\varepsilon_{i+1}}x_{i+1}\cdots t^{\varepsilon_m}x_m.$$

Observem que, si $y_i = 1$, aleshores $y_i \in H$, i $\varepsilon_{i+1} = -1$, ja que l'expressió estava t-reduïda. Podem observar també que, si $\varepsilon_{i-1} = 1$, aleshores $g_{i-1} \notin K$ ja que l'expressió està t-reduïda. Per tant, en aquest cas també tenim que $g_{i-1}k \notin K$, la paraula està t-reduïda i la part de la dreta que satisfà les condicions de la forma normal és més llarga. Si $\varepsilon_i = 1$, el procediment és similar: dins G, escribim $g_i = kz_i$, on $k \in K$ i $z_i \in Z$. Substituïm $tg_i = tkz_i = htz_i$ on $h = \varphi^{-1}(k)$ i obtenim

$$g_0t^{\varepsilon_1}g_1\cdots t^{\varepsilon_{i-1}}(g_{i-1}h)t^1z_it^{\varepsilon_{i+1}}x_{i+1}\cdots t^{\varepsilon_m}x_m.$$

De la mateixa manera, aquesta expresió està t-reduïda i la part de la dreta que satisfà les condicions de la forma normal és més llarga. Seguint amb aquest procediment, després de m passos arribem a una expressió t-reduïda que satisfà les condicions de la forma normal i que és t-paral·lela a la paraula original.

Resumirem aquests resultats en el següent lema:

Lema 4. *Donada una extensió HNN $G*_\varphi$, triem transversals Y per H dins de G i Z per K dins de G de la manera anterior. Aleshores, per tot element ω de G,*

1. *ω és igual a una t-expressió dins de G;*
2. *qualsevol t-expressió de ω es pot convertir a una expressió t-reduïda que és igual a ω dins de G;*
3. *qualsevol expressió t-reduïda per ω es pot convertir a la seva forma normal, que és t-paral·lela a l'expressió donada i igual a ω dins de G.*

Teorema 5 (Inclusió i reducció (4))**.** *Sigui $G*_\varphi$ l'extensió HNN de G amb subgrups associats H i K via l'isomorfisme $\varphi : H \to K$. Aleshores:*

1. *(Higmann, Neumann, Neumann) L'aplicació identitat en els generadors de G indueix un morfisme $G \to G*_\varphi$ que inclou G dins $G*_\varphi$. A més, t genera un subgrup cíclic infinit de $G*_\varphi$.*
2. *(Lema de Britton) Sigui ω una t-expressió qualsevol representant un element de $G*_\varphi$ que involucri t. Si $\omega =_{G*_\varphi} 1$, aleshores ω no és t-reduïda, és a dir conté alguna subparaula de la forma (i) $t^{-1}gt$ o bé (ii) tgt^{-1}, on g és un element de G, i tal que, en el cal (i) g és igual a un element de H dins de G, i en el cas (ii), g és igual a un element de K dins de G.*

Observació: El lema de Britton diu que, si ω és una t-expressió que involucra t i $\omega = 1$ dins $G*_\varphi$, aleshores ω no és t-reduïda i, per tant, es pot aplicar una t-reducció. Per tant, aplicant varies t-reduccions arribarem eventualment a una paraula de G (sense cap símbol t) que és igual a 1 per les relacions de G.

Demostració. Sigui Ω el conjunt de totes les formes normals del grup. Associem cada element $g \in G$ a una permutació del grup $Sym(\Omega)$ de totes les permutacions de Ω amb la regla

$$\theta(g)(g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m) = (gg_0) t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m$$

que defineix un morfisme de G a $Sym(\Omega)$. El símbol t l'associem a la permutació

$$\psi(t)(g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m) = \begin{cases} htz_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m & \text{si } \varepsilon_1 = 1 \\ htz_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m & \text{si } z_0 \neq 1 \ i \ \varepsilon_1 = -1 \\ (hx_1) t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m & \text{si } z_0 = 1 \ i \ \varepsilon_1 = -1 \end{cases}.$$

on $g_0 = kz_0$ amb $k \in K$, $z_0 \in Z$ i $h = \varphi^{-1}(k)$. De la mateixa forma, associem t^{-1} a la permutació

$$\psi(t^{-1})(g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m) = \begin{cases} kt^{-1} y_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m & \text{si } \varepsilon_1 = 1 \\ kt^{-1} y_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m & \text{si } y_0 \neq 1 \ i \ \varepsilon_1 = -1 \\ (kx_1) t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m & \text{si } y_0 = 1 \ i \ \varepsilon_1 = -1 \end{cases}.$$

on $g_0 = hy_0$ amb $h \in H$, $y_0 \in Y$ i $k = \varphi(h)$. És fàcil veure que $\psi(t) \circ \psi(t^{-1})$ i $\psi(t^{-1}) \circ \psi(t)$ són les dues la identitat. Per tant, les dues defineixen permutacions i determinen un morfisme $\psi : \langle t \rangle \to Sym(\Omega)$.

Extenem ara aquests morfismes a un nou morfisme

$$\theta * \psi : G * \langle t \rangle \to Sym(\Omega)$$

via la definició del producte lliure.A més, una comprovació rutinària demostra que $\theta * \psi(t\varphi(h)) = \theta(\varphi(h)) \circ \psi(t)$ i $\theta * \psi(ht) = \theta(h) \circ \psi(t)$ són de la mateixa permutació de Ω, per tot $h \in H$. Per tant, $\theta * \psi$ envia les relacions de $G*_\varphi$ a la identitat i indueix un morfisme $\theta*\psi : G*_\varphi \to Sym(\Omega)$. A més, si $g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m$ és una forma normal no trivial, és clar que

$$\theta * \psi(g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m)(1) = g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m \neq 1$$

Per tant, tota forma normal no trivial va a una permutació diferent a la identitat i no pot ser, per tant, igual a 1 dins de $G*_\varphi$. Això també implica que G està inclòs dins $G*_\varphi$, i que tota paraula t-reduïda que involucri t és diferent de 1, amb lo que el teorema queda demostrat. □

Com a exemple, prenem el grup cíclic generat per un sol element $G = \langle a \mid - \rangle$ i dos subgrups isomorfs $H = \langle a \rangle$ i $K = \langle a^2 \rangle$ via l'isomorfisme $\varphi(a) = a^2$. La extensió HNN corresponent té com a presentació $G*_\varphi = \langle a, t \mid t^{-1}at = a^2 \rangle$. Prenem $\omega = a^{-1}tat^{-1}$, i veurem que $\omega \neq_{G*_\varphi} 1$, i per tant $G*_\varphi$ no és abelià. Si tinguéssim $\omega =_{G*_\varphi} 1$, pel lema de Britton ω hauria de tenir alguna t-reducció, i en aquest cas l'única possibilitat estaria en la subparaula tat^{-1} amb $a \in K$. Però això no pot ser, ja que K només conté les potències parelles de a. Per tant no hi ha cap t-reducció possible i $\omega \neq_{G*_\varphi} 1$.

Ara ja podem demostrar la unicitat de la forma normal única.

Teorema 6 (Forma normal (4))**.** *Sigui G un grup, $H, K \leqslant G$ dos subgrups, $\varphi : H \to K$ un isomorfisme i Y i Z els conjunts transversals escollits anteriorment. Tot element de $G*_\varphi$ és igual a una única expressió de la forma*

$$g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m$$

on, si $\varepsilon_i = -1$ aleshores $x_i \in Y$; si $\varepsilon_i = +1$ aleshores $x_i \in Z$; i si $x_i = 1$ aleshores $\varepsilon_i \neq -\varepsilon_{i+1}$.

Demostració. Ja hem vist que la forma normal d'un element existeix. Suposem ara que $g_0 t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \cdots t^{\varepsilon_m} x_m$ i $g_0' t^{\delta_1} x_1' t^{\delta_2} x_2' \cdots t^{\delta_n} x_n'$ són dues formes normals del mateix element. Aleshores

$$1 = g_0' t^{\delta_1} x_1' t^{\delta_2} x_2' \cdots t^{\delta_n} (x_n' x_m^{-1}) t^{-\varepsilon_m} \cdots x_1^{-1} t^{-\varepsilon_1} g_0^{-1}$$

i, pel lema de Britton, ha d'haver-hi alguna t-reducció a l'expressió de la dreta. Com que les formes normals ja són t-reduïdes, la t-reducció ha d'estar a la conexió entre les dues: $\delta_n = \varepsilon_m$. És més, si $\delta_n = -1$, aleshores hem de tenir $x_n' x_m^{-1} \in H$, i per tant $x_n' = x_m$; i si $\delta_n = 1$ tenim $x_n' x_m^{-1} \in K$, i per tant $x_n' = x_m$ (ja que els x_i i x_1' són dels conjunts transversals). Per tant per inducció la unicitat de la forma normal queda demostrada. □

Teorema 7 (Higmann-Neumann-Neumann (4))**.** *Tot grup G es pot incloure en un altre grup G' amb únicament dos generadors i el mateix nombre de relacions que el grup G original.*

Proof. Sigui G un grup qualsevol amb presentació $G = \langle c_1, \ldots, c_n \mid r_1, \ldots, r_m \rangle$. Prenem $F_2 = \langle u, v \mid - \rangle$ el grup lliure de rang 2 i prenem ara el producte lliure de G amb F_2. La incusió de G dins $G * \langle u, v \mid - \rangle$ és injectiva ja que aquest és un producte lliure. Prenem ara els següents subgrups de $G * \langle u, v \mid - \rangle$:

$$H = \langle u, v^{-1}uv, v^{-2}uv^2, \ldots, v^{-n}uv^n \rangle$$

$$K = \langle v, c_1 u^{-1}vu, c_2 u^{-2}vu^2, \ldots, c_n u^{-n}vu^n \rangle$$

Vegem que aquests dos subgrups són cada un isomorfs al grup lliure F_{n+1}:
En el cas de H, anomenem als seus generadors u_i on $u_0 = u$ i $u_i = v^{-i}uv^i$ per $i = 1, \ldots, n$ i considerem la longitud d'una paraula sobre aquests generadors el nombre d'elements u que té la paraula. Donat

un producte arbitrari finit d'elements u_i en forma reduïda, per estar en forma reduïda no apareixeran consecutivament elements de la forma u_i^α, u_j^β tals que $i = j$ i $\alpha = -\beta$. Aleshores aquesta paraula no pot ser la identitat, ja que en qualsevol parella d'elements consecutius passarà un dels dos casos següents: si u_i^α i u_j^β són elements consecutius amb $i \neq j$, aleshores el seu producte serà de la forma $v^{-i}u^\alpha v^i v^{-j} u^\beta v^j$ i la parella $v^i v^{-j}$ no es cancel·larà completament ja que $i \neq j$. Si $i = j$, tindriem $v^{-i}u^\alpha u^\beta v^i$, i en aquest cas els elements u no es podrien cancel·lar ja que, al ser $i = j$, aleshores $\alpha \neq -\beta$. Per tant tot producte reduït i no trivial serà diferent de 1, i H és isomorf a F_{n+1}.
En el cas de K, prenem el morfisme $\mu : G * \langle u, v\rangle \to \langle u, v\rangle$ tal que $\mu(u) = v$, $\mu(v) = u$ i $\mu(c_i) = 1$ $\forall i = 1, \dots, n$. Aquest morfisme està ben definit, ja que totes les relacions r_j només estan formades per elements c_i, i per tant la imatge de qualsevol d'aquestes relacions és l'element neutre. Si mirem la imatge del subgrup K per aquest morfisme, veiem que aquesta és el subgrup H, aquest cop com a subgrup de $\langle u, v\rangle$. Per tant, aplicant el mateix argument que en el cas anterior, la imatge de K serà isomorfa a F_{n+1}, però aleshores aquest fet també es dona en K, ja que si una element $\omega \in K$ fos igual a la identitat, aleshores $\mu(\omega) = 1$, però $\mu(\omega)$ també és igual a la paraula ω sense els elements c_i, que no pot ser la identitat. Per tant, $K \cong F_{n+1}$.
Ara, com que aquests dos subgrups són amb bases donades pels respectius conjunts de generadors lliures, l'aplicació φ que envia els generadors de H als generadors de K de la següent forma:

$$\varphi(u) = v \ , \ \varphi(v^{-i}uv^i) = c_i u^{-i} v u^i \ \forall i = 1, \dots, n$$

serà un isomorfisme entre H i K. Prenem ara una extensió HNN de $G * \langle u, v \mid -\rangle$ amb H i K com a subgrups associats via l'isomorfisme φ definit anteriorment, que tindrà la següent presentació:

$$G' = (G * F_2)*_\varphi = \left\langle c_1, \dots, c_n, u, v, t \;\middle|\; \begin{array}{c} r_1(\vec{c}), \dots, r_m(\vec{c}) \\ t^{-1}ut = v \\ t^{-1}v^{-i}uv^i t = c_i u^{-i} v u^i \ \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\rangle$$

Observem que per les propietats del producte lliure i les extensions HNN la inclusió dels generadors dóna morfismes injectius $G \hookrightarrow G * \langle u, v\rangle \hookrightarrow G'$. Ara, aplicarem varies transformacions de Tietze per veure que G' és isomorf a un grup amb únicament 2 generadors i el mateix nombre de relacions que G, és a dir m. Primer, apliquem una transformació de Tietze (T4) per eliminar la relació $t^{-1}ut = v$ i el generador v, i substituïm v en totes les altres relacions on aparegui, de manera que ens queda la següent presentació:

$$G' \sim \left\langle c_1, \dots, c_n, u, t \;\middle|\; \begin{array}{c} r_1(\vec{c}), \dots, r_m(\vec{c}) \\ t^{-1}(t^{-1}ut)^{-i}u(t^{-1}ut)^i t = c_i u^{-i} t^{-1}utu^i \ \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\rangle$$

Observem ara que en les relacions $t^{-1}(t^{-1}ut)^{-i}u(t^{-1}ut)^i t = c_i u^{-i} t^{-1}utu^i$ podem aïllar c_i de manera que

$$c_i = t^{-1}t^{-1}u^{-i}tut^{-1}u^i ttu^{-i}t^{-1}u^{-1}tu^i := c_i(u, t)$$

Per tant, aplicant n transformacions de Tietze (T4) podem eliminar les relacions anteriors i els generadors c_i, i substituïr c_i per $c_i(u, t)$ en les anteriors relacions r_j, de manera que

$$G' \sim \langle u, t \mid r_1', \dots, r_m'\rangle$$

on $r_i' = r_i(c_1(u, t), \dots, c_n(u, t))$, i ja tenim un grup G' amb només dos generadors i el mateix nombre de relacions que conté el nostre grup original G. Finalment, observem que hem usat un grup finitament presentat, però el mateix argument seria vàlid en el cas $n = \infty$ i en el cas $m = \infty$. $\square$

1.7 Poblemes algorítmics de teoria de grups

Sigui G un grup, $H \leqslant G$ un subgrup i A un subgrup de $Aut(G)$. Definim els següents problemes algorítmics en teoria de grups:

1. el *word problem* per $G = \langle X \mid R \rangle$, que notarem per $WP(G)$: donat una paraula ω en X, decidir quan ω representa l'element trivial dins G i quan no. Hi ha resultats ben coneguts de grups finitament presentat amb word problem irresoluble.

2. el *membership problem* de H en G, que notarem per $MP(H, G)$: donat un element de $\omega \in G$, decidir si ω pertany a H o no. També hi ha parelles (H, G) ben conegudes que tenen $MP(H, G)$ irresoluble.

3. el *orbit decidability problem* per A, que notarem per $OD(A)$: donats dos elements $u, v \in G$, decidir quan existeix un morfisme $\varphi \in A$ tal que $\varphi(u) = v$. Novament, existeixen subgrups finitament generats $A \leqslant Aut(G)$ amb $OD(A)$ irresoluble.

Un exemple de grup amb membership problem irresoluble el va donar Mihailova fa cinquanta anys, i la construcció d'aquest grup ve donat de la següent manera:

Prenem un grup finitament presentat $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ i prenem el subgrup $M(G) = \{(x, y) \in F_n \times F_n \mid x =_G y\} \leqslant F_n \times F_n$. Vegem que aquest subgrup és generat per $M(G) = \langle (1, r_1), \dots (1, r_m), (a_1, a_1), \dots (a_n, a_n) \rangle$:

1. Els elements de la forma $(r_i, 1)$: Si $r_i = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m}$, aleshores

$$(r_i, 1) = (a_{i_1}, a_{i_1})(a_{i_2}, a_{i_2}) \cdots (a_{i_m}, a_{i_m})(1, r_i)^{-1}$$

   i per tant es poden obtenir a partir del conjunt de generadors que hem especificat.

2. Podem obtenir el conjugat d'una relació per un element g de la forma $(1, g r_i g^{-1}) = (g, g)(1, r_i)(g, g)^{-1}$

3. Donat $(x, y) \in M(G)$, vegem que podem obtenir-lo a partir dels generadors especificats: $x =_G y \Rightarrow xy^{-1} =_G 1 \Rightarrow xy^{-1} \in \ll r_1, \dots, r_m \gg$, és a dir, xy^{-1} és producte de conjugats de relacions i relacions inverses. Per tant, $xy^{-1} = \prod_{i=1}^{s} (g_i r_{j_i}^{\varepsilon_i} g_i^{-1})$. Cada element $(1, g_i r_{j_i}^{\varepsilon_i} g_i^{-1})$ el podem obtenir a partir de $(1, g_i r_{j_i}^{\varepsilon_i} g_i^{-1}) = (g_i, g_i)(1, r_{j_i})^{\varepsilon_I}(g_i, g_i)^{-1}$, per tant $(1, xy^{-1})$ es pot obtenir a partir del conjunt de generadors escollit i $(y, x) = (1, xy^{-1})(y, y)$, i per tant podem obtenir (y, x) (i naturalment també (x, y)) a partir del conjunt de generadors escollit.

Per tant, el grup de Mihailova és finitament generat pel conjunt de generadors $(1, r_1), \dots (1, r_m), (a_1, a_1), \dots (a_n, a_n)$.

Teorema 8. *Donat G un grup qualsevol, G té WP resoluble si i només si $MP(M(G), F_n \times F_n)$ és resoluble.*

Proof. Si podem resoldre el $MP(M(G), F_n \times F_n)$ és a dir, si donades dues paraules $x, y \in F_n$ podem decidir si $x =_G y$, aleshores donada una paraula $z \in F_n$ podem resoldre si $(z, 1) \in M(G)$ i, per tant, resoldre $WP(G)$. De la mateixa forma, si podem resoldre $WP(G)$, per decidir si $(x, y) \in M(G)$ prenem xy^{-1} dins el grup G i, veient si és igual a 1 o no, podem resoldre $MP(M(G), F_n \times F_n)$. $\square$

Donat G un grup i $H \leqslant G$ un subgrup, anomenem *estabilitzador de H* a

$$Stab(H) = \{\varphi \in Aut(G) \mid \varphi(h) = h \; \forall h \in H\} \leqslant Aut(G)$$

Per simplicitat, escriurem $Stab(h)$ per referirnos a $Stab(\langle h \rangle)$, $h \in H$.

Teorema 9 (Bogopolski, Martino i Ventura (1))**.** *Sigui G un grup. Suposem que hi ha dos grups $A \leqslant B \leqslant Aut(G)$ i un element $v \in G$ tal que $B \cap Stab(v) = \{Id\}$. Si $A \leqslant Aut(G)$ té $OD(A)$ resoluble, aleshores $MP(A, B)$ és resoluble.*

Proof. Donat $\psi \in B \leqslant Aut(G)$, anem a decidir si $\psi \in A$ o no. Sigui $\omega = \psi(v)$, vegem el següent:

$$\{\phi \in B \mid \phi(v) = \omega\} = B \cap (\psi \circ Stab(v))$$

Si prenem φ del primer conjunt, clarament $\varphi \in B$, i a més $\varphi = \psi \circ (\psi^{-1} \circ \varphi)$, i $\psi^{-1} \circ \varphi \in Stab(v)$ ja que $\psi^{-1} \circ \varphi(v) = \psi^{-1}(\varphi(v)) = \psi^{-1}(\omega) = v$, i per tant φ pertany al segon conjunt.
Prenent ara θ del segon conjunt, novament $\theta \in B$ i $\theta(v) = \psi(\alpha(v))$ amb $\alpha \in Stab(v)$, per tant $\theta(v) = \psi(v) = \omega$ i pertany al primer conjunt.
Vegem ara que

$$B \cap (\psi \circ Stab(v)) = \psi \circ (B \cap Stab(v))$$

Si prenem θ del primer conjunt, tenim que $\theta = \psi \circ \alpha \in B$ amb $\alpha \in Stab(v)$, per tant $\alpha = \psi^{-1} \circ \theta \in B$, i per tant tenim $\theta = \psi \circ \alpha$ amb $\alpha \in B \cap Stab(v)$.
Ara, si prenem φ del segon conjunt, tenim que $\varphi = \psi \circ \beta$ amb $\beta \in B \cap Stab(v)$, i per tant $\varphi \in B$, ja que $\psi \in B$ i $\beta \in B$ i $\varphi \in \psi \circ Stab(v)$ ja que $\beta \in Stab(v)$.
Per tant, com que $B \cap Stab(v) = \{Id\}$, tenim que

$$\{\phi \in B \mid \phi(v) = \omega\} = \psi \circ \{Id\} = \{\psi\}$$

és a dir, existeix $\phi \in A$ tal que $\phi(v) = \omega$ si i només si $\psi \in A$. Per tant, el problema $OD(A)$ aplicat a v i ω resol el problema $MP(A, B)$. $\square$

Teorema 10 (Bogopolski, Martino i Ventura (1))**.** *Per $n \geq 4$, $GL_n(\mathbb{Z})$ conté grups finitament generats amb orbit decidability irresoluble.*

Proof. A l'apartat del ping pong lema, ja vam veure que les matrius $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ generen un subgrup lliure de rang 2 dins $GL_n(\mathbb{Z})$. Ara, triem un subgrup lliure de rang 2 $\langle A', B' \rangle \leqslant \langle A, B \rangle$ que tingui intersecció trivial amb l'estabilitzador de l'element $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, el generat per $A' = A^{-1}BA$ i $B' = B$, és a dir, per les matrius $A = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Aquest subgrup, pel mateix argument que vam veure a la demostració del teorema [7], és isomorf al grup lliure de rang 2. Vegem ara que la intersecció d'aquest subgrup amb l'estabilitzador de v és la identitat:

$$Stab \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \right\}$$

A més,

$$\langle A, B \rangle \bigcap \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \langle A \rangle$$

és a dir són les matrius de la forma A^n. Però $A^n \in \langle A', B' \rangle = \langle A^{-1}BA, B \rangle \iff n = 0$ (simplement mirant l'exponent total de A's). Per tant, prenem

$$H = \left\langle \left[\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} B' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right] \right\rangle \leqslant GL_4(\mathbb{Z}) \leqslant GL_n(\mathbb{Z})$$

que clarament és isomorf a $F_2 \times F_2$. Per construcció, H té intersecció trivial amb l'estabiitzador de $v = (1, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}^n$. Ara, utilitzant la construcció de Mihailova trobem un subgrup finitament generat $K \leqslant H$ amb $MP(K, H)$ irresoluble, i degut al teorema anterior [9] aplicat a $\mathbb{Z}$, K és un subgrup de $Aut(\mathbb{Z}^n) = GL_n(\mathbb{Z})$ amb orbit decidability irresoluble. □

2. Realització pràctica

2.1 El grup de Collins

Collins (3) va trobar una presentació d'un grup amb 10 generadors i 27 relacions que té WP irresoluble. Via el teorema de Higmann-Neumann-Neumann [7], podem incloure aquest grup dins un altre amb únicament 2 generadors i 27 relacions (5), que també tindrà WP irresoluble. El grup de Collins ve donat per la següent presentació:

Presentació 1

Generadors:

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}$$

Relacions:

$$c_1^{-1}c_7^{10}c_1 = c_7,\ c_2^{-1}c_7^{10}c_2 = c_7,\ c_3^{-1}c_7^{10}c_3 = c_7,\ c_4^{-1}c_7^{10}c_4 = c_7,\ c_5^{-1}c_7^{10}c_5 = c_7,$$

$$c_1^{-1}c_8c_1 = c_8^{10},\ c_2^{-1}c_8c_2 = c_8^{10},\ c_3^{-1}c_8c_3 = c_8^{10},\ c_4^{-1}c_8c_4 = c_8^{10},\ c_5^{-1}c_8c_5 = c_8^{10},$$

$$c_9^{-1}c_1c_9 = c_1,\ c_9^{-1}c_2c_9 = c_2,\ c_9^{-1}c_3c_9 = c_3,\ c_9^{-1}c_4c_9 = c_4,\ c_9^{-1}c_5c_9 = c_5,$$

$$c_{10}^{-1}c_7c_{10} = c_7,\ c_{10}^{-1}c_8c_{10} = c_8,\ c_6^{-1}c_1^{-3}c_{10}c_1^3c_6 = c_1^{-3}c_{10}c_1^3,$$

$$c_9^{-1}c_7c_1c_3c_8c_9 = c_7c_3c_1c_8,\ c_9^{-1}c_7^2c_1c_4c_8^2c_9 = c_7^2c_4c_1c_8^2,\ c_9^{-1}c_7^3c_2c_3c_8^3c_9 = c_7^3c_3c_2c_8^3,$$

$$c_9^{-1}c_7^4c_2c_4c_8^4c_9 = c_7^4c_4c_2c_8^4,\ c_9^{-1}c_7^5c_3c_5c_8^5c_9 = c_7^5c_5c_3c_1c_8^5,\ c_9^{-1}c_7^6c_4c_5c_8^6c_9 = c_7^6c_5c_4c_2c_8^6,$$

$$c_9^{-1}c_7^7c_3c_4c_3c_8^7c_9 = c_7^7c_3c_4c_3c_5c_8^7,\ c_9^{-1}c_7^8c_3c_1^3c_8^8c_9 = c_7^8c_1^3c_8^8,\ c_9^{-1}c_7^9c_4c_1^3c_8^9c_9 = c_7^9c_1^3c_8^9$$

Anomenem $C = \langle A \mid R \rangle$ al grup donat per aquesta presentació i ara, via el teorema d'inclusió de Higmann-Neumann-Neumann, podem incloure C dins el producte lliure $C' = C * \langle u, v \mid - \rangle$. Prenem ara els subgrups

$$H = \langle u, v^{-1}uv, v^{-2}uv^2, \dots, v^{-10}uv^{10} \rangle$$

$$K = \langle v, c_1u^{-1}vu, c_2u^{-2}vu^2, \dots, c_{10}u^{-10}vu^{10} \rangle$$

del producte lliure donat, i l'aplicació $\varphi : H \to K$ tal que $\varphi(v) = v$ i $\varphi(v^{-i}uv^i) = c_iu^{-i}vu^i\ \forall i = 1, \dots, 10$, que és un isomorfisme ja que, com vam veure en la demostració del teorema de Higmann-Neumann-Neumann [7], H i K són isomorfs al grup lliure F_{11}. Ara, apliquem una extensió HNN amb H i K com a subgrups associats via l'isomorfisme φ, i obtenim el que ve donat per la següent presentació:

Presentació 2

Generadors:

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, u, v, t$$

Relacions:

$$R,\ t^{-1}ut = v,\ t^{-1}v^{-1}uvt = c_1u^{-1}vu,\ t^{-1}v^{-2}uv^2t = c_2u^{-2}vu^2,$$

$$t^{-1}v^{-3}uv^3t = c_3u^{-3}vu^3,\ t^{-1}v^{-4}uv^4t = c_4u^{-4}vu^4,\ t^{-1}v^{-5}uv^5t = c_5u^{-5}vu^5,$$

$$t^{-1}v^{-6}uv^6t = c_6u^{-6}vu^6,\ t^{-1}v^{-7}uv^7t = c_7u^{-7}vu^7,\ t^{-1}v^{-8}uv^8t = c_8u^{-8}vu^8,$$

$$t^{-1}v^{-9}uv^9t = c_9u^{-9}vu^9,\ t^{-1}v^{-10}uv^{10}t = c_{10}u^{-10}vu^{10}$$

on R són totes les relacions de la presentació 1. Com que el grup C tenia word problem irresoluble, aquest grup també, C està inclòs per mitjà d'un morfisme injectiu dins la extensió HNN i, si dins l'extensió poguéssim resoldre el word problem, també ho podriem fer dins C.

Ara, de la mateixa forma que vam fer en la demostració del teorema de Higmann-Neumann-Neumann, apliquem transformacions de Tietze de forma que eliminem v dels generadors i substituïm v per $t^{-1}ut$ a les equacions, i eliminem els elements c_i dels generadors i substituïm

$$c_i = t^{-2}u^{-i}tut^{-1}u^i t^2 u^{-i} t^{-1} u^{-1} t u^i$$

i d'aquesta manera obtenim un grup amb 2 generadors i 27 relacions, que ve donat per la següent presentació:

Presentació 3

Generadors:

$$u, t$$

Relacions:

$$R_1 : (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu$$
$$= t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tut^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7$$

$$R_2 : (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2$$
$$= t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7$$

$$R_3 : (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3$$
$$= t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7$$

$$R_4 : (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4$$
$$= t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7$$

$$R_5 : (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^5$$
$$= t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^5t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7$$

$$R_6 : t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu$$
$$= t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{10}$$

$$R_7 : t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2$$
$$= t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{10}$$

$$R_8: t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}$$
$$= t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{10}$$

$$R_9: t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}$$
$$= t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{10}$$

$$R_{10}: t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}$$
$$= t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{10}$$

$$R_{11}: t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tut^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}$$
$$= t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu$$

$$R_{12}: t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}$$
$$= t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}$$

$$R_{13}: t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}$$
$$= t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}$$

$$R_{14}: t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}$$
$$= t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}$$

$$R_{15}: t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}$$
$$= t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}$$

$$R_{16}: t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7}t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{10}$$
$$= t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{10}t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7}$$

$$R_{17}: t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{10}$$
$$= t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{10}t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}$$

$$R_{18}: (t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-3}t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{10}(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{3}$$
$$t^{-2}u^{-6}tut^{-1}u^{6}t^{2}u^{-6}t^{-1}u^{-1}tu^{6}$$
$$= t^{-2}u^{-6}tut^{-1}u^{6}t^{2}u^{-6}t^{-1}u^{-1}tu^{6}(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-3}t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{10}$$
$$(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{3}$$

$$
\begin{aligned}
R_{19}:\ & t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7}t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tut^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}\\
& t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}\\
= {}& t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}\\
& t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tut^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{20}:\ & (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{2}t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tut^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}\\
& (t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{2}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}\\
= {}& t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{2}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}\\
& t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{21}:\ & (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{3}t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}\\
& (t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{3}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}\\
= {}& t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{3}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}\\
& t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{22}:\ & (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{4}t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}\\
& (t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{4}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}\\
= {}& t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{4}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}\\
& t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{23}:\ & (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{5}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}\\
& (t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{5}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}\\
= {}& t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{5}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}\\
& t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{24}:\ & (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{6}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}\\
& (t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{6}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}\\
= {}& t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{6}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}\\
& t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{25}:\ & (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{7}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}\\
& t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{7}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}\\
= {}& t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{9}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7})^{7}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}\\
& t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}\\
& (t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{7}
\end{aligned}
$$

$$R_{26}: (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^8t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^3$$
$$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^8t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9$$
$$= t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^8(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^3$$
$$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^8$$

$$R_{27}: (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^9t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^3$$
$$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^9t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9$$
$$= t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^9(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^3$$
$$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^9$$

Finalment, agrupem les equacions de les relacions en el costat esquerra de l'equació, de manera que totes les relacions quedarien igualades a 1, i obtenim la següent presentació de C':

Presentació 3'

Generadors:

$$u, t$$

Relacions:

$$R_1: (t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}t$$
$$u^{-6}t^{-1}utu^7t^{-2}u^{-7}tu^{-1}t^{-1}u^7t^2$$

$$R_2: (t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}t$$
$$u^{-5}t^{-1}utu^7t^{-2}u^{-7}tu^{-1}t^{-1}u^7t^2$$

$$R_3: (t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}t$$
$$u^{-4}t^{-1}utu^7t^{-2}u^{-7}tu^{-1}t^{-1}u^7t^2$$

$$R_4: (t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}t$$
$$u^{-3}t^{-1}utu^7t^{-2}u^{-7}tu^{-1}t^{-1}u^7t^2$$

$$R_5: (t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^5)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{10}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}t$$
$$u^{-2}t^{-1}utu^7t^{-2}u^{-7}tu^{-1}t^{-1}u^7t^2$$

$$R_6: u^{-1}t^{-1}utut^{-2}u^{-1}tu^{-1}t^{-1}u^{-7}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu$$
$$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-10}$$

$R_7 : u^{-1}t^{-1}utut^{-2}u^{-1}tu^{-1}t^{-1}u^{-6}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{-10}$

$R_8 : u^{-1}t^{-1}utut^{-2}u^{-1}tu^{-1}t^{-1}u^{-5}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{-10}$

$R_9 : u^{-1}t^{-1}utut^{-2}u^{-1}tu^{-1}t^{-1}u^{-4}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{-10}$

$R_{10} : u^{-1}t^{-1}utut^{-2}u^{-1}tu^{-1}t^{-1}u^{-3}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8})^{-10}$

$R_{11} : u^{-9}t^{-1}utu^{9}t^{-2}u^{-9}tu^{-1}t^{-1}u^{8}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tut^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{8}$
$t^{-1}utut^{-2}u^{-1}tu^{-1}t^{-1}ut^{2}$

$R_{12} : u^{-9}t^{-1}utu^{9}t^{-2}u^{-9}tu^{-1}t^{-1}u^{7}tut^{-1}u^{2}t^{2}u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^{2}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{7}$
$t^{-1}utu^{2}t^{-2}u^{-2}tu^{-1}t^{-1}u^{2}t^{2}$

$R_{13} : u^{-9}t^{-1}utu^{9}t^{-2}u^{-9}tu^{-1}t^{-1}u^{6}tut^{-1}u^{3}t^{2}u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^{3}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{6}$
$t^{-1}utu^{3}t^{-2}u^{-3}tu^{-1}t^{-1}u^{3}t^{2}$

$R_{14} : u^{-9}t^{-1}utu^{9}t^{-2}u^{-9}tu^{-1}t^{-1}u^{5}tut^{-1}u^{4}t^{2}u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^{4}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{5}$
$t^{-1}utu^{4}t^{-2}u^{-4}tu^{-1}t^{-1}u^{4}t^{2}$

$R_{15} : u^{-9}t^{-1}utu^{9}t^{-2}u^{-9}tu^{-1}t^{-1}u^{4}tut^{-1}u^{5}t^{2}u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^{5}t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^{9}t^{2}u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^{4}$
$= t^{-1}utu^{5}t^{-2}u^{-5}tu^{-1}t^{-1}u^{5}t^{2}$

$R_{16} : u^{-10}t^{-1}utu^{10}t^{-2}u^{-10}tu^{-1}t^{-1}u^{3}tut^{-1}u^{7}t^{2}u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^{7}t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{3}$
$= t^{-1}utu^{7}t^{-2}u^{-7}tu^{-1}t^{-1}u^{7}t^{2}$

$R_{17} : u^{-10}t^{-1}utu^{10}t^{-2}u^{-10}tu^{-1}t^{-1}u^{2}tut^{-1}u^{8}t^{2}u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^{8}t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{2}$
$t^{-1}utu^{8}t^{-2}u^{-8}tu^{-1}t^{-1}u^{8}t^{2}$

$R_{18} : (t^{-2}u^{-6}tut^{-1}u^{6}t^{2}u^{-6}t^{-1}u^{-1}tu^{6})^{-1}(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-3}t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}t$
$u^{10}(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{3}t^{-2}u^{-6}tut^{-1}u^{6}t^{2}u^{-6}t^{-1}u^{-1}tu^{6}(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-3}$
$(t^{-2}u^{-10}tut^{-1}u^{10}t^{2}u^{-10}t^{-1}u^{-1}tu^{10})^{-1}(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^{2}u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{3}$

$R_{19}: u^{-9}t^{-1}utu^9t^{-2}u^{-9}tu^{-1}t^{-1}u^2tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu$
$t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu$
$t^{-1}utu^8t^{-2}u^{-8}tu^{-1}t^{-1}u^8t^2(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-1}(t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3)^{-1}$
$(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-1}$

$R_{20}: (t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^2t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu$
$t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^2t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-2}(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-1}$
$(t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-2}$

$R_{21}: (t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^3t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2$
$t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^3t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-3}(t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2)^{-1}$
$(t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-3}$

$R_{22}: (t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^4t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}t$
$u^2t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^4t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-4}(t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2)^{-1}$
$(t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-4}$

$R_{23}: (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^5t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^5$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^5t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-5}$
$(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-1}(t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3)^{-1}(t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^5)^{-1}$
$(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-5}(t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}$

$R_{24}: (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^6t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^5$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^6t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-6}$
$(t^{-2}u^{-2}tut^{-1}u^2t^2u^{-2}t^{-1}u^{-1}tu^2)^{-1}(t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4)^{-1}u^{-5}t^{-1}utu^5t^{-2}u^{-5}tu^{-1}t^{-1}$
$u^5t^2(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-6}(t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}$

$R_{25}: (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^7t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4$
$t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^7t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9$
$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-7}(t^{-2}u^{-5}tut^{-1}u^5t^2u^{-5}t^{-1}u^{-1}tu^5)^{-1}$
$(t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3)^{-1}(t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4)^{-1}$
$(t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3)^{-1}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-7}$
$(t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}$

$$R_{26}: (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^8t^{-2}u^{-3}tut^{-1}u^3t^2u^{-3}t^{-1}u^{-1}tu^3(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^3$$
$$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^8t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-8}$$
$$(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-3}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-8}$$
$$(t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}$$

$$R_{27}: (t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^9t^{-2}u^{-4}tut^{-1}u^4t^2u^{-4}t^{-1}u^{-1}tu^4(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^3$$
$$(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^9t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9(t^{-2}u^{-8}tut^{-1}u^8t^2u^{-8}t^{-1}u^{-1}tu^8)^{-9}$$
$$(t^{-2}u^{-1}tut^{-1}ut^2u^{-1}t^{-1}u^{-1}tu)^{-3}(t^{-2}u^{-7}tut^{-1}u^7t^2u^{-7}t^{-1}u^{-1}tu^7)^{-9}$$
$$(t^{-2}u^{-9}tut^{-1}u^9t^2u^{-9}t^{-1}u^{-1}tu^9)^{-1}$$

2.2 El grup de matrius buscat

En l'apartat anterior, hem trobat explícitament una presentació d'un grup amb 2 generadors i 27 relacions que té WP irresoluble. Ara, aplicarem aquest resultat sobre les matrius $GL_4(\mathbb{Z})$.

Al teorema [10] hem vist que prenent $A' = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ i $B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ el subgrup

$$H = \left\langle \left[\begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} B' & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right], \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right] \right\rangle \leqslant GL_4(\mathbb{Z})$$

és isomorf a $F_2 \times F_2$ i té intersecció trivial amb

$$stab(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{array} \right) \right\}$$

Dins $H \simeq F_2 \times F_2$ prenem el grup de Mihailova corresponent al grup de Collins calculat a l'apartat anterior

$$M(C') = \langle (A', A'), (B', B'), (1, R_1(A', B')), \ldots, (1, R_{27}(A', B')) \rangle \leqslant H \leqslant GL_4(\mathbb{Z}).$$

Finalment, pel teorema [10] $M(C') \leqslant GL_4(\mathbb{Z})$ serà orbit undecidable, és a dir, donats $u, v \in \mathbb{R}^4$, és impossible decidir algorítmicament si existeix una matriu $A \in M(C')$ tal que $Au = v$.

Per tant, les 29 matrius generadores d'aquest grup $M(C')$ són les següents:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -3 & -8 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a^k_{1,1} & a^k_{1,2} \\ 0 & 0 & a^k_{2,1} & a^k_{2,2} \end{array}\right] k = 1, \ldots, 27$$

on les matrius amb entrades $a^k_{i,j}$ corresponen a les relacions R_k, les entrades de les quals són les següents:

R_1 :

$$a_{1,1} = -66250064341102685528840287348630784142123611876407351193190483881506126670581532540717995690485194272505935049353836914138157058596441 59$$

$$a_{1,2} = -14780337454242410091997668670239793335161340105510202349892084135922784099364830549732658532256833011258635185895996230986186111111525888$$

$$a_{2,1} = 2432849075793917555129958504238558648344159364834656240908553317390021953720721597448816584091811765671532183005660762752033251644306304$$

$$a_{2,2} = 5427667229172289522769418634760293516059381324685609426368884993070656275540321699327047148412820125630866415002154756749537086282042 89$$

R_2 :

$$a_{1,1} = -30077365928091185687267063848162875851892947807933337424079816116438776268431567164628525870586186166803999418066266664833003556428014 2591$$

$$a_{1,2} = -67102367759681091744237970304570923779275525109437566440483057767300443959630931626143828163041579154238707765308452583573591989129018880$$

$$a_{2,1} = 1310211986421358845954586735502773529127406854310681901401148416974243633038602414204923540015060911683952798433829504364479348013270598 40$$

$$a_{2,2} = 2923072677513815557215674206893932034618890484967600852713500206900525978665766801868547360235975513579150502036704302806269128217787 4689$$

R_3 :

$$a_{1,1} = -22076393194185720108180811844775677778953751423503956448831397180209976152272583258665634042591064945671126984811912842212869696916266585 59$$

$$a_{1,2} = -49252260269906699230899733211492892741520366521801725910922581084110084718435312561467398536426946391391346145988431175443936004949039 4624$$

$$a_{2,1} = 1010002482247736147967570747231387432198972591492502312255747520460645311568878287931410614427924199974362675773557191985293270036453159808$$

$$a_{2,2} = 2253307625541779287880664393887056309861752186495674012594930408717186543350666474321727221378054701897440994275591558554046866562593 49249$$

R_4 :

$$a_{1,1} = -70007047502825760132238484641933520405443217898469247621595472753246167651539318560494389770267541082716343192693978119773654848364269964 79$$

$$a_{1,2} = -15618517454404646619791297644095762004340147706897052854281933631432908168638453393939441907699897871860882788950864353944712195587665751 04$$

$$a_{2,1} = 3278328258907940219950698801906976289019555616791289063362705002575917451736637100894662909591967415734726172802751900271104982526033294208$$

$$a_{2,2} = 7313924663221216418342645638868176085730630769529484796478154405982078258815361943919982361374144732134004264160689326342634081859148090 89$$

R_5 :

$$a_{1,1} = -1189289661008464054116939299300089867133082392428659447204198703471472732212296736629\\
98788163145219180056948793903559727363226665766403345 91$$

$$a_{1,2} = -2653295916822363252784507513646542537847762931438962750124258907511901253112405390676\\
5672479113918201522434554197668460523774090589581798 40$$

$$a_{2,1} = 5645600514662617140004834578279761423272497458726608464384871458778698045597404910046 4\\
97963935690616969455846012024803857500683216895505280$$

$$a_{2,2} = 1259529052061434456380195082698685574612615380236149765981769290509094380416741675169 0\\
5447611565993770180417085815935573334458306322824268 9$$

R_6 :

$$a_{1,1} = -2459067821019414772994911131479679220590255505497427892440294323828317660760537437447\\
81746105367414024493721892285578471996294574794909900 7$$

$$a_{1,2} = -5483478263884420855825784573049106187307108646369389307685886035958173216659516073488\\
85336951468022467903876864515725590364354916592349184$$

$$a_{2,1} = 9030241608339068018890451113771510102985701761667181397519666794316851610362053510112 3\\
00897259981166470724031660602083405610601484640901 12$$

$$a_{2,2} = 2013654652128483387088041499715403843921075886267932318571063311157169544895648644845 8\\
2275069345826776834317509767788288192712289967052801$$

R_7 :

$$a_{1,1} = -1426266405904356597877602079398857067960395411168486380414915014632747608540076982665\\
6315937716684072406970363888291859146425986590178495779$$

$$a_{1,2} = -3180433157814619960830881299258818583874754313392066097474342954777887486979031882127\\
7408928705339597337785409841866427324420410215839872 08$$

$$a_{2,1} = 5237566094388750811238333964028278165605298555851271831135999118498388294286742891013 7\\
2848555949515107515341087659607949924823154808926646 6$$

$$a_{2,2} = 1167925487404114339417530574111940090289222232154732800131502756911631156536488632868 7\\
7268053245918719151222721523186999271819792931835421 3$$

R_8 :

$$a_{1,1} = -3327827784664257264147720837213248149980368502620597199606228806437342647879406301769\\
0305897012422691823773275926684964770966187921308099143$$

$$a_{1,2} = -7420727141877811602427833231542543843282615158443109334548299125600457424556016383379\\
2911041165410984669012908988552906432434388556607948 96$$

$$a_{2,1} = 1222052058491175273348148501390967065167357621840399960045828918920200437833090297834 9\\
7809273312678687619924535475271964009803910176448077 48$$

$$a_{2,2} = 2725055341212025150287175002005220163838643491990812206609044761394156922600011459226 2\\
7864700650252652983134248587586424043345568483997344 9$$

R_9 :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} = & -50370445592423221731329318335764990286371885704687316468942214740922732098249460552362750085622732093557842509903545811622353421301237847915 \\
a_{1,2} = & -11232111663911886774971025861727886173286886006031859917598884370648434262177693685658174123858331642296960797220036734919108276453982901784 \\
a_{2,1} = & 18497143093463459713522081806468857072498019381811725585566475520187038767583843876085956620863929043858189965098453576934828452443473947494 \\
a_{2,2} = & 41246801422060461569738874890146388303271899332650088740136203733177247425846099784373181144788923480022129726058054203839028366653536561 73
\end{aligned}
$$

R_{10} :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} = & -55263393141907872452512702214516142873146575361602248725091333228943215306038833735831536637789867707053607434947854844527900717781758454927 \\
a_{1,2} = & -12323190620929143983766085965720300580860447376789214403194367360241811896521692702213294618929096944336971398213529169293472645162558584864 \\
a_{2,1} = & 20293941789745697005534041272273185407689377637611072199574779927197044203168083688454809722599588673211376389512305672825139664086669914248 \\
a_{2,2} = & 45253484975649903010692434781078606750460723864852174277358335578975669284410478561386395962228098608939965709981512006696885312345210338 73
\end{aligned}
$$

R_{11} :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} &= -7505681661742522768983694138681 58975 \\
a_{1,2} &= -17125368417545329454035474370160 2304 \\
a_{2,1} &= 36479121425987620002368258167957 0944 \\
a_{2,2} &= 83232732498193188557060617021685 761
\end{aligned}
$$

R_{12} :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} &= -3688632180884175495110053490729 3663231 \\
a_{1,2} &= -8308649465068068972449574740186 628096 \\
a_{2,1} &= 1792749376890576819207735186046 5303552 \\
a_{2,2} &= 4038170633682579199594017184504 872961
\end{aligned}
$$

R_{13} :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} &= -3089532903120315650258124537233 98471679 \\
a_{1,2} &= -6928391065592724379972811067651 7847040 \\
a_{2,1} &= 1501575086736955384062169110983 73734400 \\
a_{2,2} &= 3367337310037315525043034062227 2430081
\end{aligned}
$$

R_{14} :

$$a_{1,1} = -1205978351846574260908613463307022499839$$
$$a_{1,2} = -269838464530347684937869475233713356800$$
$$a_{2,1} = 58612971768256635588034835034610335744 0$$
$$a_{2,2} = 1311469171837930276492616163073091 17441$$

R_{15} :

$$a_{1,1} = -2944980429451153756293240656396361400319$$
$$a_{1,2} = -658047997998724443840492243048600698880$$
$$a_{2,1} = 14313196792063884875082620832512055 70560$$
$$a_{2,2} = 3198245529847120067052113175541658 41921$$

R_{16} :

$$a_{1,1} = -234867497821627988299222646822024301772 79$$
$$a_{1,2} = -523987547689591643036115866208876625920 0$$
$$a_{2,1} = 11448060204532850214570520375307607736320$$
$$a_{2,2} = 2554053263228311520737152445545374023681$$

R_{17} :

$$a_{1,1} = -232609436677755827064072226699018974003 19$$
$$a_{1,2} = -518696059984269658802623022513101209600 0$$
$$a_{2,1} = 11337996359342158374694986511243825643520$$
$$a_{2,2} = 2528261159006178004344244715112858910721$$

R_{18} :

$$a_{1,1} = -4936320032594525537781232714889582806659475524517877631682462975493772648935611634892\\ 247271572792721089445348548417653062538872487935 9$$
$$a_{1,2} = -1344232665402425753945363537287967137068244375249364649851313799916102111435378562872\\ 7073009558341199882369756327291062362757415305216 0$$
$$a_{2,1} = 236430585914211390312802412995298417365238632776245170343546510459041612574417173104 50\\ 52131478546746536999915749692293720259545792512 0$$
$$a_{2,2} = 643835315756610047991980156594913688152107505830260472983285893128927218520953152940 03\\ 8313013937147575872657728355395788809141066137 61$$

R_{19} :

$a_{1,1} = -2435128641264567164618236099994990661179817108974502827172291107626033298632704850062$
5671855276031

$a_{1,2} = -5432752921879207633299767125655303751821847328760673102721888844434252604563720044331$
521709965312

$a_{2,1} = 1183521462752355286302947958829685627573808991390169763152639994202889444063801920374 5$
587132366848

$a_{2,2} = 2640427111701012460472412946037099650549328853323310800578837292809272860989868387346 2$
12217421825

R_{20} :

$a_{1,1} = -4771082768756558294990761182324538886641506075743847417976192735055588642239276295399$
$10352382800863768116940692588784152988655581439210605772799$

$a_{1,2} = -1064424828046429823801600611993618792273996424738548387748848393362395333813101688994$
$22337500703992347265912631706766628138124520697347467902976$

$a_{2,1} = 2318842118525199364752179945008125220454905033911806578001644459442235657152468351176 3$
$24217216754346359246740336679027347687282827631763872808 96$

$a_{2,2} = 5173318600635545856631472663703642624048945671253314466735963495202060696946499433480 7$
$4295591101403273805475139066735281306815091604934665175 05$

R_{21} :

$a_{1,1} = -2401282540524420963900163958490651024763549950133089115517276337561957283013873647518$
$5878983631528738833879080758526239123727608784482924460905506236989403258192134207923394 9$
14147171878043647

$a_{1,2} = -5357242536278075969952619266332457883761717265363205373416029747941309128261091768523$
$3047048973677015005178714347211639036906356047279262584119621912759293926011315188784939$
99218077351280640

$a_{2,1} = 1167071577527548673349982898834255427721480260952238011814769286334328876193706971523 5$
$7358155896180676373268439673143771061268768659988553935779264591824685406314175849790912$
48805084779249664

$a_{2,2} = 2603727546632763471418670153552599068528784350121333389187942028391892778153643481878 2$
$7198433259032450724928246214456179685380216638310503090266205324222573330092334187428313 7$
888573452189697

R_{22} :

$a_{1,1} = -4705149038873580684806628897251763959125155218917101095566647834351801878911128988432$
86519940409295893034572332665827513591516283359392108176011993015265078870806401134308272
808834859598547445944364266121846028013706256823108047688695807

$a_{1,2} = -1049715064561978907915156385852390419598658776585288955805126544873550202891742844752$
14660649031158118186643866249026894685582253872031960372546440701230749462605556635710785
913718287817238974377099446806818046890501508394001395057950720

$a_{2,1} = 22867970006150025808787971473859337595087824903749244401621977815535682292359080120514$
89875228567777238900107702069648925666622878389755770224855341038066784824539131394983633
60197588851051882674422880557247251598331500314154647404150784

$a_{2,2} = 51018261936191434890271487637408927505432053587180595205632269194344028967042777427238$
54070089855091390522696606180081141740996854703450033594015112741534135304162110547455699
3780429810632478050947831430044993513182306503173470678941697

R_{23} :

$a_{1,1} = -9694648348919911194671071145754928646948974696875352236423775431192886163313568892761$
00265554066300040030291941421216404793200548617838718732623429635649778722641684817156079
71987102123035970073524147924057096343449259076860444420895088076711619884553969174782870
65295870924989669934205107329791

$a_{1,2} = -2160987160139358514194322511867742861043393129213138340118149003513690517637667941917$
94321466354474353133437511380272346501181828774490738434008815913024602267181497891701046
71499012749796046195728045946454791560140954014022272268340416426728973058163040459132385
19735937463457844284603553086976

$a_{2,1} = 43454425778077045198445369409982488347427998916800996256293123854837633918706620288471$
22420574293432093328486014981389236794870297437929048834197982520984750886971160884479850
26401537809257110139376983104543872701472442109161624468845247046596096046936151034236492
54683162273700365413742690014080

$a_{2,2} = 96862158149465237327462369534165017379468090364232262618567557341348702257199545278462$
87322476309829407469360004470588316007378998618893215084178815646997486278530144933695399
17000286642711702626821738961245285151221504990439856225032716296217927848211121294589416
9471034134337352180557099981569

R_{24} :

$a_{1,1} =$ $-$ 3040956811425850623567203392111090746706292488875030115775026581161113828101206731108
36610035987486793381243444257328178233423545449807549225897238493564447767670587625947792
13136344936539830368542854368022534005323423263275135710678847602978680967379164598050534
10899881424153134120781874207408159888801762873103291289751514427910425806468607

$a_{1,2} =$ $-$ 6778449704946462010616317508130596949027423546534819311935497732957750925892363914234
52050552772709346961659400673374715030368528376795969095875610310830044177701986440517483
80947173186677067603868852606955617915712646686213920346192715742282243010770714647212195
1475631208680216694487087969505598701002906923902250211212404794385614227373056

$a_{2,1} =$ 13630513175979675847198755974872977497501047662039252427652909644376740503167222682818
35223566072952187996499794583086472228726853076597330336679120491034589151091815974281477
52749077687076085280560333529526982508514587214194248428842068875682669444090152275049352
48573015719162459063967908557503732628602714635336350922692659695727078626715392

$a_{2,2} =$ 30383117467777028235854761409084349705641025071371243243966637301449837560607675164422
89538712606724047454613996583831664989388362421412863251066455947694518562054575038473256
68488899022396757909207567649619157914560712263806133257472614902583672531429078370276457
3524070461458774970146513887611521537873038760586393473889359741120330397742593

R_{25} :

$a_{1,1} =$ $-$ 1156503476210272750745346012721728442045892937474122398424340711082118510003993666691
52368567836789063964830982588136012073769260120886621073445935792772164212867313660188253
2019209762256093452488688947179479636096931929425355181638800364224280519631701467354458
6466119581332458158267120715519185616998737587399355319129060933768798075403226802422042
2200287874038796347418958559776998682552803900215093053183

$a_{1,2} =$ $-$ 257790594645485023287047009620289220764456021246921468619673314779174777062215536376180
354294698694701803466990240266818111419929711470596943087174552534036139333559694253062734
5838885642310422256787013470486169309147219450869546058741868118004756517198918193450301
561930948181064846441407280760878337747917665587449711246059537941851705964790957322267
3583971006394125302305594760882953376171146264171836928

$a_{2,1} =$ 51838078762976856055219343328335678995375271723295839426132092332695462519544817582745
50984452347591977212188368294238404141799180950226712409148315700551966268125753321024628
853997782560935344181413842993397968216194982576966273772041418675110360166711053526796
8468136727010058298682251573381755232063539940258693343164423497876033859839579457408503
6288371486144421928899726899856087791139060671571777315200

$a_{2,2} =$ 11554975341170177302969808015020558962315725783516137869224288467370436886426289987526
38271810206818081279932067811574613498756588384231317419314953425307767869824829613204718
086601384196830348408102922815328117822282665160901276394882715828015697871521478797215
0682285494094170152602576205351250662340949971892813962036519990065101453896202462191180
8282396796306622725067995318022666340936593980881534404353

R_{26} :

$$
\begin{aligned}
a_{1,1} = & -104090692617211931835180501769137436517976392367829251855902208225899624797511731098 2\\
& 194299466238061829901373848380128426167906062777562273372936807489270711262449996479261 1\\
& 264296835484358486214343075710856583548387472892612670827022316127110927989679083089869 9\\
& 441125649865334709111803295614212395545931193410223324722126845126138086734306639246872 1\\
& 257885004818070137730912592350259686860742105233587369359485981232971524703031972817709 8\\
& 495\\
a_{1,2} = & -232023526939858840121086556520064945908325479855765040607406065591502371398014775098 2\\
& 708806416012464941838736183403763332584191445982666231514740311735703903730593327882654 1\\
& 008210412353367221621214182378866597763985980204324394161860073216919103372726608894298 3\\
& 483540075996049266323767900840672703799400682395738522044744472685771356939817823793441 8\\
& 088039277943986559499479125615497128398425942717913604521609966055226227734801496025794 0\\
& 48\\
a_{2,1} = & 466566822614788472171966570797693924743657807665032431121186641859813108803558140778 32\\
& 826714254656180882377099647613092383271313769927159897251492662843418640683687564787407 8\\
& 549823382433268272653972461341893705353349933145343093683602635419345058714025259200851 2\\
& 518240648201828614045553300872891372099662572671850178077698409764787200791328661699624 4\\
& 759350976065252181117004090496172090838237521367903776948063903290362743287121812053132672\\
a_{2,2} = & 104000153149433725960859378152734928329423822770384684593512157654035962824167429278 63\\
& 129658341013774385336123079324507486193533520752768551315136080126405654129594722983240 7\\
& 817578086331557774040596116336195184096500142805443266130739280594025662299185898825019 1\\
& 493240044436856163202601290355861141728858502109703150321364471859010547802100978876586 5\\
& 594886299859686218115415930070581664399848154911581036453709819590552574159379746823\\
& 778049
\end{aligned}
$$

R_{27}

$a_{1,1} = -645314624611606221078131608743642435997264171920748513619663405281821231816268157049629778765997809033039766667532462479603113536799937410222055659675025063593293411184691880707273071303911717480912899892281513598925477772865575381312119249688504834984090741309220173850282480423117183593077754678715764950690314290417711349898318099777289473133691151120068491281749888342955206240115840583663522483755356158286057273599879036279132945782609905594190628853269356974467016154510289848312$

$a_{1,2} = -143843960899437406606022867774198220253269626502068336115224120787619588299375633092282821910476893272663550805060324069559213915198051894744133171232212089538878937611806018168018541895717632040945901545853936833409952050487941016870360769436144843729608603874802090495561913690157527071886887281312105046239420481248630165771941307306770040224161873517042888848179723504893592962512143162102165709267249813318137367381899503656561596820922596392283832893072407899555325007116369940 48$

$a_{2,1} = 289250063018705062722440414826470369695648280859992625576796475510652945720839081120145165139488230263483421622666767887499418377255983756819516529579328669212898161991141876136177736846311747649985689019373485587301004059917565163238925061630071319330971130223461336474102564259546352597525510802795185008379245782107145666946072213782526312384319042494229121044095585061926047930450469159692204483140536281417440587013088866220477419566186105949331229733276570253358163535496028238336$

$a_{2,2} = 644753321375046082867639563251980841272258836719434409971055737565732594627959024306567410983521707742665299599048569087309491756437482935950262278043340276596305646400502295401388458205528459314516020905060397095364470763822899394415796746651422608035212987872723274052942887877071613553056229467484478146446465969639803297995763082593323661018526164193260983299455872639955564398594997626950244905898150721002348738295407797867676521285119609556013862937374287503819136498594864220 17$

3. Conclusions

L'objectiu del treball era mostrar explícitament un subgrup de les matrius $GL_4(\mathbb{Z})$ que tingués orbit decidability problem irresoluble.

S'ha aconseguit aquest objectiu, tot i que les entrades de les matrius obtingudes han acabat resultant d'un ordre inesperadament gran. Per arribar a aquest resultat, vam començar a partir d'un grup explícit donat per Collins en el que es demostrava l'existència d'un grup amb 10 generadors i 27 relacions i que tenia word problem irresoluble. Després, mitjançant les extensions HNN, vam introduïr aquest grup dins un altre amb únicament 2 generadors i 27 relacions, que seguia tenint word problem irresoluble. Aleshores, utilitzant la construcció de Mihailova, vam veure que aquest grup es podia veure com un subgrup de $F_2 \times F_2$ tal que el membership problem d'aquests dos grups era també irresoluble, i mitjançant la proposició 7.3 de l'article (1), vam veure que el grup d'automorfismes del nostre subgrup tenia orbit decidability problem irresoluble. Finalment, vam aplicar tots aquests càlculs a un subgrup de les matrius 4×4 que prèviament, mitjançant el Ping Pong Lema, havíem vist que era isomorf a $F_2 \times F_2$, i replicant els càlculs sobre aquest grup mitjançant el multiplicador de matrius que ofereix matrixcalc.org, vam obtenir les matrius explícites que buscàvem.

Un fet curiós és que l'existència d'un subgrup de matrius tal que, donats 2 vectors u i v, no es pugui decidir si existeix una matriu A del subgrup tal que $Au = v$, per matrius de $GL_2(\mathbb{Z})$ que no es pot trobar, fet que està demostrat a l'article "Orbit decidability and the conjugacy problem for some extensions of groups", de O. Bogopolski, A. Martino, E. Ventura (1), i en el mateix article, a la qüestió 8, es fa la pregunta de si aquest resultat és cert o no per matrius de $GL_3(\mathbb{Z})$.

Referències

[1] O. Bogopolski, A. Martino, E. Ventura, "Orbit decidability and the conjugacy problem for some extensions of groups", *Transactions of the American Mathematical Society* **362** (2010), 2003–2036.

[2] Matt Clay, Dan Margalit, "Office Hours with a Geometric Group Theorist", *Princeton University Press* (2017)

[3] D. J. Collins, "A simple presentation of a group with unsolvable word problem", *Illnois J. Math.* **30**(2)(1986), 230-234.

[4] Charles F. Miller III, "Combinatorial Group Theory", *University of Melbourne* (2004)

[5] Xiaofeng Wang, Chen Xu, Guo Li, Hanling Lin, "Groups With Two Generators Having Unsolvable Word Problem And Presentations of Mihailova Subgroups", *Communications in Algebra* **44** (2016), 3020–3037