

# Grado en Matemáticas

---

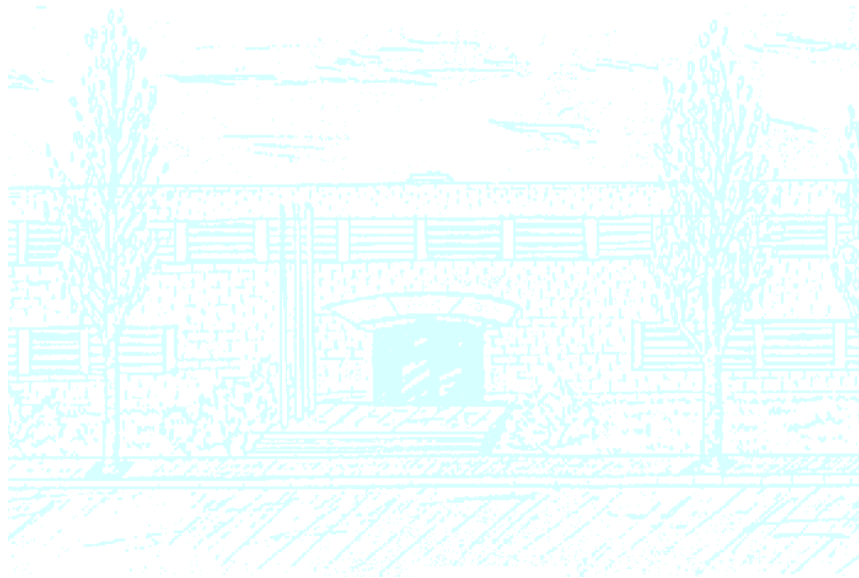
**Título:** Calculadora para el retículo de subgrupos del grupo libre.

**Autor:** Ángel García Gómez

**Director:** Enric Ventura Capell

**Departamento:** Matemática aplicada III

**Convocatoria:** 2014/2015



Universitat Politècnica de Catalunya  
Facultat de Matemàtiques i Estadística

Trabajo de Fin de Grado

# **Calculadora para el retículo de subgrupos del grupo libre**

Ángel García Gómez

Director: Enric Ventura Capell

Departamento de Matemática Aplicada III

# Resumen

**Palabras clave:** Grupo libre, subgrupo, Stallings, grafo, intersección, índice, *orla*, extensiones algebraicas, implementación, C++, código abierto.

**MSC2000:** 20E05

En este trabajo se describen algunas propiedades y operaciones básicas del grupo libre y de sus subgrupos, así como una metodología para la resolución algorítmica de ciertos problemas algebraicos mediante el uso de grafos. Además, se ha desarrollado un programa de código abierto escrito en C++ que implementa los métodos explicados.

# Abstract

**Keywords:** Free group, subgroup, Stallings, graph, intersection, index, fringe, algebraic extensions, implementation, C++, open source

**MSC2000:** 20E05

The aim of this work is, after describing the main characteristics of the free group and the set of its subgroups, to introduce algorithmic methods used to solve some basic problems in this area. The main tool of this methods is the use of graphs and their bijection with the set of subgroups of the free group. In addition, most of the exposed methods have been actually implemented in an open source C++ program.

# Índice general

Introducción	1
<b>Parte 1. El grupo libre y grafos</b>	<b>3</b>
Capítulo 1. El grupo libre	5
1. Definición	5
2. Subgrupos del grupo libre	6
3. Intersección de subgrupos	6
Capítulo 2. Representación de subgrupos	9
1. Grafos	9
2. Relación entre grafos y subgrupos del grupo libre	10
3. Grafos de Stallings	10
<b>Parte 2. Resolución de problemas algebraicos</b>	<b>13</b>
Capítulo 3. Pertenencia	15
1. Algoritmo	15
Capítulo 4. Intersección de subgrupos	21
1. <i>Pull-back</i> de dos grafos	22
2. <i>Pull-back</i> e intersección	23
Capítulo 5. Índice de un subgrupo	25
1. Grafos $\bar{A}$ -regulares	25
Capítulo 6. Extensiones algebraicas de un subgrupo	27
1. Orla de un subgrupo	27
2. Teorema de Takahasi	28
3. Extensiones algebraicas	30
Capítulo 7. Morfismos de grupos libres	33
1. Automorfismos biyectivos	33
2. Automorfismos de Whitehead	34
3. Problema de Minimización de Whitehead	34
4. Whitehead de máximo descenso	35
5. Identificación de factores libres	36
<b>Parte 3. Implementación</b>	<b>37</b>

Capítulo 8. Descripción y uso del programa	39
1. Crear subgrupos	39
2. Pertenencia	40
3. Intersección	40
4. Índice	41
5. Orla	42
Bibliografía	45

# Introducción

Los grupos libres (finitamente generados) son unos objetos algebraicos centrales en la Teoría Combinatoria y Geométrica de Grupos, una de las áreas del álgebra más modernas. El retículo de subgrupos del grupo libre es extremadamente complejo y da lugar a multitud de problemas de investigación, muchos de ellos aún abiertos

El estudio de estas estructuras se vió revolucionado por un artículo de J. R. Stallings en 1983 en el que demostró una biyección entre los subgrupos finitamente generados del grupo libre y un subconjunto de los grafos con unas propiedades determinadas.

Gracias a esto, muchos problemas se pueden resolver con técnicas mucho más sencillas que las utilizadas hasta la fecha. La idea general de todas ellas consiste en obtener el grafo equivalente a un subgrupo, resolver en este un problema de grafos equivalente al que se quiere resolver, y a “traducir” de nuevo el resultado al mundo del álgebra no conmutativa.

La ventaja de este sistema radica en que los grafos son una estructura poco abstracta que ha sido ampliamente estudiada desde el punto de vista algorítmico, por lo que los problemas en este ámbito se suelen resolver de forma sencilla y eficiente mediante el uso de algoritmos generalmente conocidos. Además, en el ámbito de los grafos no hay que tratar con una de las mayores complicaciones del álgebra no conmutativa, como vendrían siendo las cancelaciones.

A lo largo de este trabajo se explicará, tras una breve introducción a las estructuras algebraicas que utilizarán, en qué consiste la biyección entre grafos de Stallings y subgrupos del grupo libre. Además, se indicarán algunas formas de utilizar esta técnica para la resolución de problemas algebraicos conocidos como la pertenencia o la intersección.

Además, como parte de este trabajo se ha desarrollado un *software* que lleva a la práctica muchas de las técnicas explicadas.





# Parte 1

## El grupo libre y grafos



# Capítulo 1

## El grupo libre

### 1. Definición

Sea  $A$  un conjunto finito

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}.$$

y sea  $\bar{A}$  el conjunto formado por los elementos de  $A$  y sus inversos formales:

$$\bar{A} = \{a_1, a_1^{-1}, a_2, a_2^{-1}, \dots, a_r, a_r^{-1}\}$$

Una *palabra* es una secuencia  $w = s_1 s_2 \dots s_k$  de elementos de  $\bar{A}$ . Además, si se cumple que  $s_i \neq s_{i+1}^{-1} \quad \forall i \in [k-1]$ , decimos que  $w$  es una *palabra reducida*. Definimos la *palabra vacía* como la secuencia de longitud cero, y la representamos con 1.

Sea ahora  $F_A$  el conjunto formado por las palabras reducidas sobre  $A$  y la palabra vacía, y definimos una operación en  $F_A$  que consiste en concatenar dos palabras. Es decir, si  $w_1 = s_1 s_2 \dots s_n$ , y  $w_2 = t_1 t_2 \dots t_m$  son dos elementos de  $F_A$ , entonces

$$w_1 w_2 = (s_1 s_2 \dots s_n)(t_1 t_2 \dots t_m) = s_1 s_2 \dots s_n t_1 t_2 \dots t_m$$

Nótese que esta palabra no tiene por qué ser reducida. Por tanto, si  $s_n = t_1^{-1}$ , entonces estas dos letras se cancelan, y así sucesivamente hasta que se obtiene una palabra de  $F_A$ .

La palabra vacía es el elemento neutro de esta operación, y dada una palabra  $w = s_1 s_2 \dots s_n$ , entonces su inversa es la palabra  $w^{-1} = s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} \dots s_1^{-1}$ .

La demostración de la asociatividad, a pesar de no ser complicada, es muy extensa y se puede ver en [2].

DEFINICIÓN 1.1. *El conjunto  $F_A$  con la operación descrita es el grupo libre, y a  $A$  se le denomina la base libre. Si  $B$  es otro conjunto de cardinal  $s$ , no es difícil ver que  $F_A$  es isomorfo a  $F_B$  si y sólo si  $r = s$ . Se define el rango del grupo libre  $F_A$  como  $|A|$ .*

## 2. Subgrupos del grupo libre

Un subgrupo de un grupo es un subconjunto que también es un grupo. En el caso del grupo libre, el estudio de sus subgrupos es un campo interesante, ya que tiene propiedades que pueden no resultar intuitivas en relación a otros grupos de uso habitual como  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{R}$ . En la mayoría de las ocasiones, estas propiedades son consecuencia de la no conmutatividad del grupo libre.

Por ejemplo, si  $F_A$  es un grupo libre de rango  $r$ , existen subgrupos en  $F_A$  de cualquier rango posible (el rango de un subgrupo es el tamaño del mínimo conjunto que lo genera), incluso rangos mayores que  $r$ . Como ejemplo particular,  $H = \langle a, bab^{-1}, b^2ab^{-2} \rangle$  es un subgrupo de  $F_{\{a,b\}}$  de rango 3, mientras que el grupo tiene rango 2. De hecho, este grupo contiene subgrupos de rango infinito:  $H_\infty = \langle a, bab^{-1}, b^2ab^{-2}, b^3ab^{-3}, \dots \rangle$ .

Una propiedad que sí que es intuitiva pero que no es evidente viene dada por el teorema siguiente.

**TEOREMA 2.1** (Nielsen-Schreier). *Todo subgrupo de un grupo libre es libre.*

**2.1. Extensiones de grupos libres.** Una extensión de grupos libres es un par  $H \leq K$ . Existen ciertas relaciones de inclusión entre subgrupos del grupo libre que son especialmente interesantes.

- (1)  $H \leq_{fg} K$  si  $H$  es un subgrupo de  $K$  *finitamente generado*.
- (2)  $H \leq_{ff} K$  si  $H$  es un *factor libre* de  $K$ . Esto significa que cualquier base de  $H$  puede ser completada a una base de  $K$ . Esta propiedad siempre se cumple en, por ejemplo, los subespacios de un espacio vectorial, pero no en el grupo libre.
- (3)  $H \leq_{fi} K$  si  $H$  tiene *índice finito* dentro de  $K$ . Más adelante veremos cómo comprobar sencillamente si un subgrupo del grupo libre tiene índice finito.
- (4)  $H \leq_{alg} K$  si para toda descomposición de  $K$  en producto libre de dos subgrupos libres  $K = A * B$ , se cumple que si  $H \leq A$ , entonces  $B$  es el grupo trivial. Es decir, si no existe ninguna separación de  $K$  en grupos no triviales que deje a  $H$  en una de las partes.

A lo largo de este trabajo, se considerarán sólo subgrupos del grupo libre que sean finitamente generados.

## 3. Intersección de subgrupos

Sean  $H, K \leq F_A$  dos subgrupos del grupo libre finitamente generados. Su intersección  $H \cap K$ , por ser subgrupo de grupos libres, también es un grupo libre.

Acabamos de comprobar que un subgrupo de un grupo libre puede tener rango mayor que el del grupo que lo contiene, o incluso ser infinito. El rango de la intersección, sin embargo, sigue unas ciertas restricciones.

**TEOREMA 3.1** (Howson). *La intersección de dos grupos libres finitamente generados también es finitamente generada.*

Por tanto, el rango de la intersección  $H \cap K$  no puede ser infinito, y no sólo eso, sino que además está acotado en función de los rangos de  $H$  y  $K$ .

$$\text{rank}(H \cap K) - 1 \leq 2(\text{rank}(H) - 1)(\text{rank}(K) - 1)$$

Esta cota se puede obtener combinatoriamente a partir del algoritmo de intersección de subgrupos que se explicará más adelante.

En [7], Hanna Neumann conjeturó lo siguiente.

CONJETURA 3.2 (Hanna Neumann).

$$\text{rank}(H \cap K) - 1 \leq (\text{rank}(H) - 1)(\text{rank}(K) - 1)$$

Esta conjetura ha resultado ser cierta y ha sido probada recientemente usando técnicas más complicadas que las que veremos en este escrito.

Diremos que un subgrupo  $H$  es *inerte* si  $\forall K, \text{rank}(H \cap K) \leq \text{rank}(K)$ . Determinar algorítmicamente si un subgrupo es inerte es un problema actualmente abierto.



# Capítulo 2

## Representación de subgrupos

### 1. Grafos

El retículo de subgrupos del grupo libre está en biyección con un conjunto de grafos con unas propiedades determinadas ([3]). Esta biyección ha probado ser una gran herramienta que simplifica el estudio de los subgrupos del grupo libre, permitiendo resolver problemas anteriormente irresolubles por medio de conocidos problemas de grafos que se pueden resolver algorítmicamente. Todos los algoritmos expuestos en las páginas siguientes se basan en el uso de grafos para la resolución de problemas algebraicos.

Un *grafo* con etiquetas en  $\bar{A}$  es un par  $\Gamma = (V, E)$ , donde  $E \subseteq V \times V \times \bar{A}$  que cumple que si  $(u, v, a) \in E$ , entonces  $(v, u, a^{-1}) \in E$ . El conjunto  $V$  es el conjunto de nodos, y  $E$  es el conjunto de aristas del grafo  $\Gamma$ .

Dada una arista  $e = (u, v, a)$ , diremos que  $u$  es el *nodo inicial* de  $e$ ,  $v$  es su *nodo final* y  $a$  es su *etiqueta*, y la arista  $\bar{e} = (v, u, a^{-1})$  es la *arista opuesta* de  $e$ . Evidentemente,  $\bar{\bar{e}} = e$ .

Un *camino* en  $\Gamma$  es una secuencia de aristas  $e_1 e_2 \dots e_l$  del grafo, tales que el nodo final de  $e_i$  es el nodo inicial de  $e_{i+1}$ . Además, si el nodo inicial de  $e_1$  es el mismo que el nodo final de  $e_l$ , entonces es un *camino cerrado* sobre este nodo. Si  $e_i \neq \bar{e}_{i+1} \forall i \in [n-1]$ , entonces se dice que el camino es *reducido*. Se define también el *camino opuesto* de  $p = e_1 e_2 \dots e_l$  como  $p^{-1} = \bar{e}_l \bar{e}_{l-1} \dots \bar{e}_1$ .

Un grafo es *conexo* si para todo par de vértices  $(u, v)$  existe un camino de  $u$  a  $v$ .

En general, un grafo  $\Gamma$  tendrá un nodo que se llamará el *nodo base* y que será representado por  $n_0$ . A partir de ahora, a no ser que se especifique lo contrario, cuando se hable de caminos cerrados en  $\Gamma$  se hablará de caminos cerrados sobre  $n_0$ .

## 2. Relación entre grafos y subgrupos del grupo libre

Sea ahora  $p$  un camino cerrado (sobre  $n_0$ ) en el grafo, y  $w$  la secuencia de las etiquetas de las aristas de  $p$ . Se tiene que  $w$  es una palabra en  $\bar{A}$ , que tras realizar las cancelaciones pertinentes se corresponde a un elemento de  $F_A$ .

Si se puede encontrar un camino cerrado en  $\Gamma$  que se corresponda a un elemento  $w$  de  $F_A$ , entonces también se pueden encontrar caminos cerrados que se correspondan a  $w^n$ , ya que la concatenación de caminos cerrados sobre un mismo nodo también es un camino cerrado sobre este nodo. Por otro lado, también se puede encontrar un camino cerrado que se corresponda a  $w^{-1}$ , que es el camino opuesto.

Dadas dos palabras  $w_1, w_2$  tales que existe un camino cerrado en  $\Gamma$  para cada una de ellas, la concatenación de estos dos caminos da lugar a un camino que también es cerrado y cuya palabra asociada es el producto  $w_1w_2$ .

Por tanto, un grafo se corresponde al subgrupo  $H \leq F_A$  generado por las palabras correspondientes a caminos cerrados sobre  $n_0$  en  $\Gamma$ .

De hecho, es fácil obtener un grafo asociado a partir de los generadores de un subgrupo. Partiendo del grafo trivial, que tan solo contiene el nodo base, se añaden caminos cerrados disjuntos sobre el nodo base tales que la secuencia de etiquetas de estos caminos sean los generadores del subgrupo. Hay que tener en cuenta que este grafo depende de la base escogida para representar  $H$ , sin embargo, en general se dará la base por conocida o la base será indiferente. Por tanto, denotaremos este grafo por  $\Gamma_A^0(H)$ .

## 3. Grafos de Stallings

Bajo estas circunstancias, existen muchos grafos diferentes con los que se obtiene el mismo subgrupo. De hecho, dado un grafo, añadirle una rama acabada en un vértice de grado uno, o cualquier cambio en componentes conexas que no contengan el nodo base, no afectarán al subgrupo asociado. Por tanto, la primera condición que se impondrá en los grafos es que tengan una sola componente conexa y que no tenga vértices de grado uno que no sean el nodo base. El grafo  $\Gamma_A^0(H)$  cumple estas condiciones.

Además, no hemos ganado simplicidad, ya que sigue pudiendo haber cancelaciones al transformar la secuencia de etiquetas de un camino cerrado en un elemento del grupo libre.

Una cancelación en un camino reducido se debe a que se han atravesado dos aristas consecutivas que tienen etiquetas contrarias. Cuando se da esta situación, es decir, que  $\exists u, v, w, s$  tal que  $s \in A$ , y  $(u, v, s), (u, w, s) \in E$ , se dice que el grafo no está *folded*. Un *folding* de este grafo consiste en obtener un nuevo grafo  $\Gamma^*$  identificando los dos vértices  $v, w$  (y por tanto las dos aristas). Si  $v$  o  $w$  eran el nodo base del grafo original, entonces el nodo resultante  $\overline{vw}$  de la identificación de ambos (cuya lista de adyacencia es la unión de las listas de adyacencia) será el nodo base



del grafo resultante. El *folding* queda completamente determinado con el grafo y la tupla  $f = (u, v, w, s)$ .

El *folding* tiene la interesante propiedad de que no afecta al subgrupo asociado al grafo. Un camino cerrado en el  $\Gamma$  se puede convertir directamente en un camino cerrado en  $\Gamma^*$  simplemente sustituyendo los  $v$  y  $w$  en las aristas del camino original por  $\overline{vw}$ . La inclusión contraria (que se puede obtener un camino en el  $\Gamma$  a partir de uno en  $\Gamma^*$ ) no es tan trivial, pero hay una demostración algorítmica más adelante en el apartado de pertenencia. Además, si  $\Gamma$  es conexo,  $\Gamma^*$  también lo es y no se crean nodos de grado uno.

**DEFINICIÓN 3.1.** *Un Grafo de Stallings es un grafo conexo, folded y que no tiene vértices de grado uno distintos del nodo base.*

**TEOREMA 3.2.** *El conjunto de los Grafos de Stallings con etiquetas en  $\bar{A}$  está en biyección con el conjunto de subgrupos de  $F_A$  finitamente generados.*

Veremos a continuación la biyección explícitamente, viendo primero como obtener el grafo de Stallings de un subgrupo y, a continuación, como obtener una base del subgrupo a partir del grafo.

**3.1. Grafo de Stallings de un subgrupo.** Supongamos que, partiendo del grafo  $\Gamma_A^0(H)$ , hemos obtenido una secuencia de grafos diferentes utilizando *foldings*.

$$\Gamma_A^0(H) \xrightarrow{f_1} \Gamma_A^1(H) \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_p} \Gamma_A^p(H)$$

Donde  $\Gamma_A^p(H)$  es un grafo que no admite más *foldings*. Definimos  $\Gamma_A(H) = \Gamma_A^p(H)$  como el Grafo de Stallings del subgrupo  $H$ . Es necesario comprobar que esta definición es correcta.

En primer lugar, es necesario comprobar que la secuencia es finita. Esto se debe a que al realizar un *folding*, el grafo resultante tiene al menos una arista menos que el grafo original, así que la longitud de la secuencia es cómo máximo el número de aristas en el grafo.

En segundo lugar, en un grafo puede haber varios *foldings* factibles diferentes. Sin embargo, el orden en el que estos se hagan no afecta al resultado final. La demostración de esto es tediosa y está relacionada con la demostración de la asociatividad en el grupo libre ([3]).

En tercer lugar, el grafo  $\Gamma_A^0(H)$  depende de la base escogida para representar  $H$ . Sin embargo, en [3] podemos ver que el grafo de Stallings es independiente de ella.

**EJEMPLO 3.3.** *Sea  $H = \langle abcb, ca^{-1}b, a \rangle \leq F_A$  un subgrupo. En la Figura 1 se muestra el grafo  $\Gamma_A^0(H)$  y su secuencia de foldings hasta obtener el grafo de Stallings  $\Gamma_A(H)$ .*

**3.2. Obtener una base del subgrupo.** En este apartado, nos será útil poder tratar con una arista y con su inversa como si fuesen una sola entidad. Para ello, consideraremos el conjunto  $E^+$  de las aristas bidireccionales:  $2|E^+| = |E|$ .

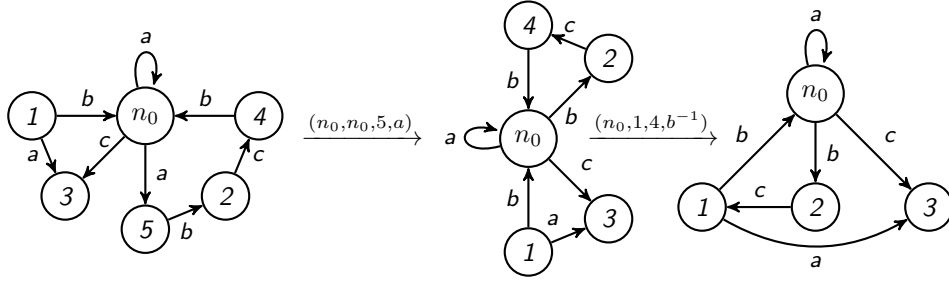


FIGURA 1. Secuencia de *foldings* de  $H$ . Una arista entre  $u$  y  $v$  apuntando a  $v$  y con etiqueta  $s$  representa dos aristas:  $(u, v, s)$  y  $(v, u, s^{-1})$

El proceso empieza por escoger un árbol generador  $T$  del grafo de Stallings, utilizando por ejemplo el algoritmo de *Kruskal*. Por ser un árbol, tiene  $|V| - 1$  aristas (bidireccionales) y es conexo: para cada nodo  $u \in V$ ,  $\exists!$  camino reducido  $p_u$  de  $n_0$  a  $u$ .

Sea  $C$  el conjunto de las  $|E^+| - (|V| - 1)$  aristas que no están en el árbol. Para cada una de ellas  $e_i \in C$ , tenemos que el camino  $c_i = p_{u_i} e_i p_{v_i}^{-1}$  es un camino reducido cerrado dentro del grafo. Estos caminos nos darán elementos de  $F_A$  que forman una base del subgrupo asociado al grafo.

Es obvio que estos caminos también son caminos cerrados en el grafo original. Falta ver que generan el subgrupo. Para ello, consideremos un camino cerrado reducido  $p$  en el grafo de Stallings. Si lo escribimos en la forma:

$$p = t_1 e_{i_1}^{\epsilon_1} t_2 e_{i_2}^{\epsilon_2} \dots t_{m-1} e_{i_{m-1}}^{\epsilon_{m-1}} t_m$$

Donde  $e_i$  son las aristas que no están en el árbol,  $\epsilon_i = \pm 1$  y  $t_i$  son subcaminos contenidos dentro de él, podemos ver que este camino es equivalente a  $c_{i_1}^{\epsilon_1} c_{i_2}^{\epsilon_2} \dots c_{i_{m-1}}^{\epsilon_{m-1}}$  tras realizar las cancelaciones oportunas.

De aquí se deduce que el rango de este subgrupo es el número de ciclos independientes, que viene dado por el teorema de Euler.

$$\text{rank}(H) = |E^+| - |V| + 1$$

## Parte 2

# Resolución de problemas algebraicos



# Capítulo 3

## Pertenencia

Dado un subgrupo del grupo libre  $H \leq F_A$ , no es un problema trivial determinar si una palabra reducida  $w$  forma parte de  $H$  o no, debido a la gran cantidad de cancelaciones que se pueden producir al multiplicar elementos del grupo libre. Por ejemplo, consideremos el subgrupo  $H = \langle x, y, z \rangle = \langle aba, ba^2b^{-1}, abab \rangle$ . Es fácil ver, en este caso, que  $b \in H$ . Aunque no es tan obvio, también se puede ver que  $a \notin H$ , ya que todos los elementos de la base tienen un número par de  $a$ . Pero ver si  $ab^{-1}a$  forma parte de  $H$  parece ser más complicado.

Utilizando la relación entre los subgrupos del grupo libre y los grafos de Stallings, comprobar si cualquier elemento es un miembro del subgrupo se convierte en un problema fácil de resolver, y no sólo eso, sino que además también será posible averiguar cómo representar un elemento como producto de los generadores y sus inversos. Por ejemplo, en el caso anterior:

$$\begin{aligned} ab^{-1}a &= (abab)^{-1}(aba)(ba^2b^{-1})(aba)^{-1}(abab)(aba)^{-1}(abab)^{-1}(aba) \cdot \\ &\cdot (ba^2b^{-1})(aba)^{-1}(abab) = z^{-1}xyx^{-1}zx^{-1}z^{-1}xyx^{-1}z \end{aligned}$$

Por tanto,  $ab^{-1}a \in H$ , pero su representación como producto de generadores no es, en absoluto, trivial.

Además, este problema es clave para la resolución de otros problemas más importantes. Por ejemplo, dados dos subgrupos  $H, K \leq F_A$ , se tiene que  $H \leq K$  si y sólo si todos los generadores de  $H$  son miembros de  $K$ . También se podrá determinar, como se verá en detalle más adelante, si un morfismo entre grupos libres es exhaustivo, y en caso de biyectividad, obtener el morfismo inverso.

### 1. Algoritmo

Sea  $H \leq F_A$  un subgrupo y  $\Gamma_A(H)$  su grafo de Stallings. Sea ahora una palabra reducida  $w = s_1s_2\dots s_k \in F_A$ . Entonces  $w \in H$  si y solo si existe un camino cerrado en  $\Gamma_A(H)$  cuya secuencia de etiquetas sea exactamente  $w$ .

En caso de existir, este camino es único, y se puede ir construyendo incrementalmente. El nodo inicial del camino es el nodo base  $n_0$ . Supongamos que tenemos

construido un camino  $p_i$  en  $\Gamma_A(H)$  de longitud  $i$ , cuyo nodo final es  $u_i$  y tal que su secuencia de etiquetas son los  $i$  primeros términos de  $w$ . Para poder continuar el camino, necesitamos una arista que salga de  $u_i$  cuya etiqueta sea  $s_{i+1}$ . Si no existe tal arista, entonces  $w \notin H$ . Si existe, entonces es única, ya que el grafo está *folded*. Incrementamos el camino usando esta arista y repetimos el proceso hasta obtener un camino de longitud  $k$  (la longitud de la palabra). Si este camino es cerrado (acaba en  $n_0$ ), entonces  $w \in H$ . En caso contrario,  $w \notin H$ .

Para ver la correctitud del algoritmo, el primer paso es comprobar que en un camino reducido no hay cancelaciones, ya que si las hubiese, quizás sería posible encontrar un camino reducido de longitud mayor que  $k$  tal que, aunque su secuencia de etiquetas no sea exactamente  $w$ , tras una serie de cancelaciones sí que lo fuese.

Para haber una cancelacion, tiene que haber dos aristas consecutivas en el camino con etiquetas opuestas:

$$p = e_1 e_2 \dots (u_i, u_{i+1}, s)(u_{i+1}, u_{i+2}, s^{-1}) \dots e_n$$

Pero esto da lugar a una contradicción, ya que  $\bar{e}_i = (u_{i+1}, u_i, s^{-1})$  y por tanto hay dos aristas cuyo nodo inicial es  $u_{i+1}$  y que tienen la misma etiqueta. Como el grafo es *folded*, estas dos aristas deben ser la misma, y esto significa que  $u_i = u_{i+2} \Rightarrow e_i = \bar{e}_{i+1}$  y el camino no es reducido.

**1.1. Determinar producto de generadores.** Teniendo  $w$  como un camino cerrado en  $\Gamma_A(H)$  se puede obtener una representación de  $w$  como producto de los generadores originales de  $H$  y de sus inversos. Si estos generadores son independientes (una *base*), entonces esta representación es única.

Para hacer esto, es necesario conocer una secuencia de *foldings* que transforme  $\Gamma_A^0(H)$  en  $\Gamma_A(H)$  (nótese que en este caso está definido con respecto a la base en la que se quiere representar  $w$ ).

$$\Gamma_A^0(H) \xrightarrow{f_1} \Gamma_A^1(H) \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_p} \Gamma_A^p(H) = \Gamma_A(H)$$

La idea general consiste en “elevar” el camino por los *foldings* (obtener un camino cerrado reducido en  $\Gamma_i(H)$  a partir del camino en  $\Gamma_{i+1}(H)$ ) hasta obtener un camino en  $\Gamma_A^0(H)$ , a partir del cual es trivial obtener la representación como producto de elementos de la base: cada vez que el camino vuelve a visitar el nodo base, se ha multiplicado o bien por uno de los elementos de la base o bien por uno de sus inversos.

Procedamos ahora a una explicación más detallada del algoritmo. Supongamos que tenemos un camino cerrado reducido  $p_i$  de longitud  $l$  en  $\Gamma_i(H)$ ,  $i \in [p]$ , y queremos obtener a partir de este otro camino cerrado y reducido en  $\Gamma_{i-1}(H)$  que se corresponda a la misma palabra. El grafo  $\Gamma_i(H)$  ha sido obtenido a partir de  $\Gamma_{i-1}$  por medio del *folding* definido por  $f_i = (u, v, w, \sigma)$ . La identificación en  $\Gamma_i(H)$  del los nodos  $v$  y  $w$  se llama  $\bar{v}\bar{w}$ . El nuevo camino se construirá incrementalmente a partir del anterior.

Supongamos que vamos por el paso  $j$ : hemos construido un camino  $\tilde{p}$  en  $\Gamma_{i-1}(H)$  a partir del prefijo de longitud  $j$  del camino  $p_i$ , cuyo nodo final es  $x$ . A lo largo del

proceso mantendremos el siguiente invariante: si  $z = \overline{vw}$ , entonces el nodo final de  $\tilde{p}$  puede ser tanto  $v$  como  $w$ ; en caso contrario, el nodo final de  $\tilde{p}$  debe ser igual a  $x$ .

La arista que vamos a elevar ahora es  $e_{ij} = (x, y, s)$ . Hay cuatro casos:

- (1)  $x, y \neq \overline{vw}$ : En este caso, tan solo hay que incrementar el camino  $\tilde{p}$  con la arista  $e_{ij}$ .
- (2)  $x \neq \overline{vw}, y = \overline{vw}$ : Necesariamente, el grafo  $\Gamma_{i-1}(H)$  debe tener por lo menos una de las dos aristas:  $(x, v, s)$ ,  $(x, w, s)$ . Incrementar el camino  $\tilde{p}$  con cualquiera de las dos.
- (3)  $x = \overline{vw}, y \neq \overline{vw}$ : El nodo final de  $\tilde{p}$  es o  $v$  o  $w$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que es  $v$  (el caso contrario es totalmente análogo). Si  $\Gamma_{i-1}(H)$  tiene la arista  $(v, y, s)$ , la usamos para incrementar  $\tilde{p}$ . Si no la tiene, entonces necesariamente tiene  $(w, y, s)$ , y en este caso incrementamos  $\tilde{p}$  con  $(v, u, \sigma^{-1})(u, w, \sigma)(w, y, s)$ .
- (4)  $x = y = \overline{vw}$ : Este caso es una combinación de los dos anteriores. Si existe una arista desde  $x$  hasta  $v$  o  $w$  con la etiqueta indicada, se toma, y en caso contrario se atraviesa el *folding* como en el caso anterior y ahora necesariamente estará una de las dos.

Hay que tener especial cuidado en el caso de que  $\overline{vw}$  sea el nodo base, ya que en este caso, el camino puede terminar tanto en  $v$  como en  $w$ . Sin embargo, sólo uno de ellos será el nodo base del grafo  $\Gamma_{i-1}(H)$ , por lo que es posible no haber obtenido un camino cerrado. En este caso, se debe alargar el camino para llegar al nodo base utilizando las aristas del *folding*, como en los casos (3) y (4). De esta forma, obtenemos un camino cerrado que representa el mismo elemento.

Sin embargo, el camino no tiene por qué ser reducido. Definimos  $p_{i-1}$  como la reducción de este camino: se cancelan los pares de aristas consecutivas de la secuencia formados por una misma arista en direcciones opuestas.

**1.2. Explicación del ejemplo.** En la Figura 2 se pueden ver los *foldings* del subgrupo  $H$ . Dada la palabra  $w = ab^{-1}a$ , el camino asociado a esta palabra en el grafo de Stallings es  $p_7 = (n_0, 1, a)(1, 1, b^{-1})(1, n_0, a)$ . A continuación se muestran caminos obtenidos al “elevar” este camino por los *foldings*.

- $p_6 = (n_0, 1, a)(1, n_0, a)(n_0, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a)$ .
- $p_5 = (n_0, 3, a)(3, n_0, a)(n_0, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, 3, a)(3, n_0, a)$ .
- $p_4 = (n_0, n_0, b^{-1})(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})(n_0, n_0, b)(n_0, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, n_0, b^{-1})(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})(n_0, n_0, b)$ .
- $p_3 = (n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})(2, n_0, a)(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})(n_0, 2, a^{-1})(2, 5, a)(5, n_0, b)(n_0, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})(2, n_0, a)(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})(n_0, 2, a^{-1})(2, 5, a)(5, n_0, b)$ .
- $p_2 = (n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, 6, b)(6, n_0, a)(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})(n_0, 6, a^{-1})(6, 1, b^{-1})(1, 2, b)(2, 5, a)(5, n_0, b)(n_0, 6, a^{-1})(6, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, 6, b)(6, n_0, a)(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})(n_0, 6, a^{-1})(6, 1, b^{-1})(1, 2, b)(2, 5, a)(5, n_0, b)$ .

- $p_1 = (n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, 7, a)(7, 6, b)(6, n_0, a)$   
 $(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})(n_0, 6, a^{-1})(6, 7, b^{-1})(7, n_0, a^{-1})(n_0, 1, a)$   
 $(1, 2, b)(2, 5, a)(5, n_0, b)(n_0, 6, a^{-1})(6, 7, b^{-1})(7, n_0, a^{-1})(n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})$   
 $(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, 7, a)(7, 6, b)(6, n_0, a)(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 4, a)(4, n_0, b^{-1})$   
 $(n_0, 6, a^{-1})(6, 7, b^{-1})(7, n_0, a^{-1})(n_0, 1, a)(1, 2, b)(2, 5, a)(5, n_0, b).$
- $p_0 = (n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, 7, a)(7, 6, b)(6, n_0, a)$   
 $(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 8, a)(8, n_0, b^{-1})(n_0, 6, a^{-1})(6, 7, b^{-1})(7, n_0, a^{-1})(n_0, 1, a)$   
 $(1, 2, b)(2, 5, a)(5, n_0, b)(n_0, 6, a^{-1})(6, 7, b^{-1})(7, n_0, a^{-1})(n_0, 5, b^{-1})(5, 2, a^{-1})$   
 $(2, 1, b^{-1})(1, n_0, a^{-1})(n_0, 7, a)(7, 6, b)(6, n_0, a)(n_0, 4, b)(4, 3, a)(3, 8, a)(8, n_0, b^{-1})$   
 $(n_0, 6, a^{-1})(6, 7, b^{-1})(7, n_0, a^{-1})(n_0, 1, a)(1, 2, b)(2, 5, a)(5, n_0, b).$

La secuencia de etiquetas del camino  $p_0$  es

$$w = (b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1})(aba)(baab^{-1})(a^{-1}b^{-1}a^{-1})(abab)(a^{-1}b^{-1}a^{-1})(b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}).$$

$$\cdot (aba)(baab^{-1})(a^{-1}b^{-1}a^{-1})(abab) = z^{-1}xyx^{-1}zx^{-1}z^{-1}xyx^{-1}z$$



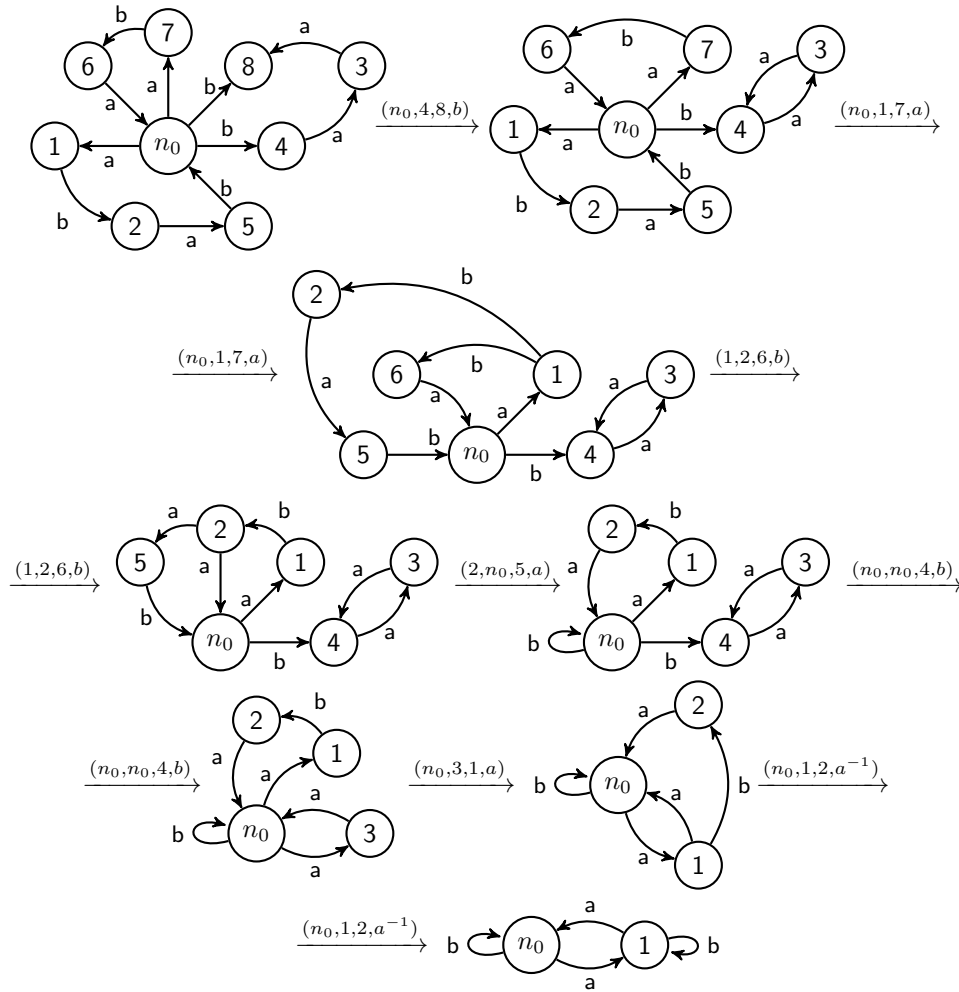


FIGURA 2. Secuencia de *foldings* del subgrupo  $H = \langle aba, ba^2b^{-1}, abab \rangle$



# Capítulo 4

## Intersección de subgrupos

El hecho de que la intersección de subgrupos libres finitamente generados también sea finitamente generada (Teorema de Howson) permite tratar este problema por medio del uso de grafos de Stallings. Sin esta herramienta, extraer propiedades de la intersección de dos subgrupos sería más complicado, incluso el simple hecho de encontrar una base.

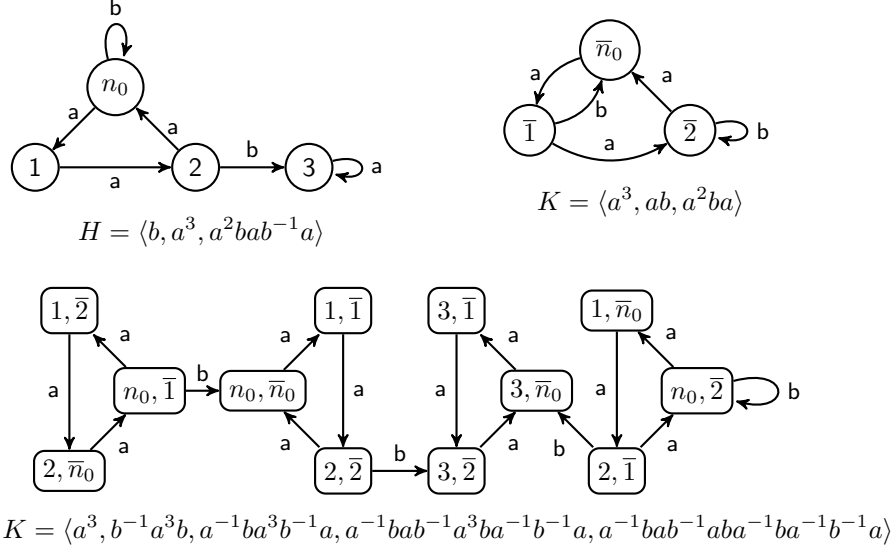
Por ejemplo, sean  $H$  y  $K$  dos subgrupos:  $H = \langle u, v, w \rangle = \langle b, a^3, a^2bab^{-1}a \rangle$ , y  $K = \langle x, y, z \rangle = \langle a^3, ab, a^2ba \rangle$ . A simple vista se puede ver que  $a^3 \in H \cap K$  e indagando un poco más se puede ver que  $b^{-1}a^3b$  también forma parte de la intersección. Encontrar el resto de generadores a ojo cómo estos dos no es un procedimiento válido, ya que estos podrían ser arbitrariamente grandes. Y no sólo eso, sino que tampoco se sabe cuando se han encontrado todos y hay que dejar de buscar: la conjetura de Hanna Neumann tan sólo proporciona una desigualdad respecto al rango de la intersección, no dice nada sobre como construir una base.

Utilizando los grafos de Stallings, sin embargo, se puede encontrar determinísticamente una base de la intersección de forma computacionalmente eficiente. En el ejemplo anterior, por ejemplo, se obtiene que  $\text{rank}(H \cap K) = 5$ , y una posible base sería:

$$\begin{aligned}
 a^3 &= v = x \\
 b^{-1}a^3b &= u^{-1}vu = y^{-1}xy \\
 a^{-1}ba^3b^{-1}a &= v^{-1}wv^{-1}wv^{-1}w = x^{-1}zxz^{-1}x \\
 a^{-1}bab^{-1}a^3ba^{-1}b^{-1}a &= v^{-1}wvw^{-1}v = x^{-1}zy^{-1}xyz^{-1}x \\
 a^{-1}bab^{-1}aba^{-1}ba^{-1}b^{-1}a &= v^{-1}wuw^{-1}v = x^{-1}zy^{-1}zx^{-1}yz^{-1}x
 \end{aligned}$$

En la Figura 3 se pueden ver los grafos de Stallings correspondientes a este ejemplo.

A continuación, veremos que calcular la intersección de dos subgrupos es equivalente a una sencilla operación entre grafos llamada *pull-back*.

FIGURA 3. Grafos de Stallings de  $H$ ,  $K$  y  $H \cap K$ 

## 1. *Pull-back* de dos grafos

Dados dos grafos  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  y  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ , el *pull-back* de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  es un nuevo grafo definido por  $\Gamma = Pb(\Gamma_1, \Gamma_2) = (V, E)$ , donde:

$$V = V_1 \times V_2$$

$$E = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2), s) \in V \times V \times \bar{A} \mid (u_1, v_1, s) \in E_1, (u_2, v_2, s) \in E_2\}$$

El nodo base será el nodo producto  $(n_{01}, n_{02})$  de los nodos base de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ .

El *pull-back*, en general, no cumple los requisitos para ser un grafo de Stallings, aunque  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  sí lo hagan. Puede no ser conexo y tener vértices de grado uno que no sean el nodo base. Sin embargo, si  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  están *folded*, entonces  $\Gamma$  también lo estará.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $\Gamma$  no está *folded*. Entonces tiene dos aristas con mismo nodo inicial y misma etiqueta.

$$e_1 = ((u_1, u_2), (v_1, v_2), s) \in E \Rightarrow \begin{cases} (u_1, v_1, s) \in E_1 \\ (u_2, v_2, s) \in E_2 \end{cases}$$

$$e_2 = ((u_1, u_2), (w_1, w_2), s) \in E \Rightarrow \begin{cases} (u_1, w_1, s) \in E_1 \\ (u_2, w_2, s) \in E_2 \end{cases}$$

No puede ser que  $v_1 = w_1$  y  $v_2 = w_2$ , ya que entonces tendríamos que  $e_1 = e_2$ . Entonces, si  $v_1 \neq w_1$ , tenemos dos aristas diferentes  $(u_1, v_1, s)$ ,  $(u_1, w_1, s)$  en el grafo  $\Gamma_1$  con el mismo nodo inicial y misma etiqueta, por lo que no estaría *folded*. Análogamente, si  $v_2 \neq w_2$ , entonces el grafo  $\Gamma_2$  no estaría *folded*, y como ambos lo están, se tiene una contradicción.  $\square$

Por tanto, obtener un grafo de Stallings a partir del *pull-back* es sencillo. Tan sólo hay que eliminar las componentes conexas que no contienen el nodo base e ir “podando” sucesivamente los nodos de grado uno (distintos del nodo base), ya que ninguna de estas operaciones afecta al subgrupo asociado al grafo. A este grafo se le denominará  $Pb^*(H, K)$ .

## 2. *Pull-back* e intersección

TEOREMA 2.1. Sean  $H$  y  $K$  dos subgrupos del grupo libre. Entonces:

$$\Gamma(H \cap K) = Pb^*(\Gamma_A(H), \Gamma_A(K))$$

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente con ver que el subgrupo asociado al *pull-back* es la intersección, ya que las operaciones que transforman el *pull-back* en  $Pb^*(\Gamma_A(H), \Gamma_A(K))$  no afectan al subgrupo asociado.

Para ello, veremos que podemos obtener caminos cerrados en ambos grafos a partir de caminos en el *pull-back* y viceversa. Si  $p$  es un camino en el *pull-back*

$$p = ((n_{01}, n_{02}), (u_1, v_1), s_1)((u_1, v_1), (u_2, v_2), s_2) \dots ((u_{n-1}, v_{n-1}), (n_{01}, n_{02}), s_n)$$

Inmediatamente, podemos definir dos caminos en  $\Gamma_A(H)$  y  $\Gamma_A(K)$ :

$$p_H = (n_{01}, u_1, s_1)(u_1, u_2, s_2) \dots (u_{n-1}, n_{01}, s_n)$$

$$p_K = (n_{02}, v_1, s_1)(v_1, v_2, s_2) \dots (v_{n-1}, n_{02}, s_n)$$

Ya que, por construcción, la arista  $((u_i, v_i), (u_{i+1}, v_{i+1}), s_{i+1})$  está en el *pull-back* si y sólo si las aristas  $(u_i, u_{i+1}, s_{i+1})$  y  $(v_i, v_{i+1}, s_{i+1})$  están en  $\Gamma_A(H)$  y  $\Gamma_A(K)$ . Este argumento funciona en ambas direcciones y por eso a partir de dos caminos en los dos grafos podemos definir uno en el *pull-back* con la misma secuencia de etiquetas.  $\square$

Por tanto, obtener el grafo de Stallings de la intersección de dos subgrupos consiste en calcular el grafo de Stallings de los dos subgrupos, calcular el *pull-back* de este y convertirlo en un grafo de Stallings.

Una vez se tiene este grafo, en la sección 3 se ha visto cómo obtener una base del subgrupo asociado a un grafo de Stallings.



# Capítulo 5

## Índice de un subgrupo

El índice de un subgrupo es otra de las propiedades que se pueden determinar fácilmente gracias a la biyección de Stallings. Con el método que se explicará a continuación, no sólo es posible determinar el valor del índice, sino que si este es finito (podría no serlo) se podrá obtener un representante de cada una de las clases laterales.

Para relacionar el índice con los grafos, es necesario introducir un nuevo concepto, el de grafos  $\bar{A}$ -regulares.

### 1. Grafos $\bar{A}$ -regulares

Un grafo  $\Gamma = (V, E)$  es  $\bar{A}$ -regular si  $\forall u \in V, \forall s \in \bar{A}, \exists v \in V$  tal que  $(u, v, s) \in E$ .

La relación entre grafos  $\bar{A}$ -regulares y el índice de un subgrupo viene dada por el teorema siguiente.

TEOREMA 1.1. *Sea  $H \leq F_A$ . Entonces*

$$|F_A : H| < \infty \Leftrightarrow \Gamma_A(H) \text{ es } \bar{A}\text{-regular}$$

DEMOSTRACIÓN. ( $\Rightarrow$ ) Asumamos que  $|F_A : H| = I < \infty$ . Esto significa que podemos escribir  $F_A$  como unión finita de sus clases laterales.

$$F_A = \bigcup_{i=1}^I Hg_i$$

Supongamos que  $\Gamma_A(H)$  no es  $\bar{A}$ -regular  $\Rightarrow \exists u \in V, s \in \bar{A}$  tal que no hay ninguna arista que salga de  $u$  con etiqueta  $s$ . Sea  $w$  la palabra asociada a un camino reducido de  $n_0$  a  $u$ . Entonces la palabra  $ws$  es reducida y no puede existir ninguna palabra reducida en  $H$  que tenga  $ws$  como prefijo.

Sea  $L = \max\{|g_1|, |g_2|, \dots, |g_I|\}$ , y sea  $x = ws^{L+1} \in F_A$ . Necesariamente,  $x$  está contenido en alguna de las clases laterales:  $x \in Hg_i \Rightarrow xg_i^{-1} \in H$ . Pero  $xg_i^{-1}$  tiene prefijo  $ws$ , por lo que no puede pertenecer a  $H$ .

$$\Rightarrow \Gamma_A(H) \text{ es } \bar{A}\text{-regular}$$

( $\Leftarrow$ ) Asumamos ahora que el grafo  $\Gamma_A(H)$  es  $\bar{A}$ -regular. Para cada  $u \in V$ , sea  $p_u$  la palabra asociada a un camino desde el nodo base hasta el nodo  $u$ . Sea ahora  $w \in F_A$  una palabra cualquiera. Es obvio que existe un camino  $p_w$  en  $\Gamma_A(H)$  cuya palabra asociada es  $w$ , ya que desde cualquier vértice todas las etiquetas están disponibles. Al nodo final de este camino lo denotaremos por  $\eta(w)$ .

$$\begin{aligned}
F_A &= \bigcup_{w \in F_A} w = \bigcup_{w \in F_A} wp_{\eta(w)}^{-1}p_{\eta(w)} \\
&= \bigcup_{u \in V} \bigcup_{w \in F_A | \eta(w)=u} wp_u^{-1}p_u = \bigcup_{u \in V} \left( \bigcup_{w | \eta(w)=u} wp_u^{-1} \right) p_u \\
&= \bigcup_{u \in V} Hp_u \\
&\Rightarrow |F_A : H| = |V| < \infty
\end{aligned}$$

□

Por tanto, comprobar si el subgrupo tiene índice finito es tan sencillo como comprobar que el grafo de Stallings es  $\bar{A}$ -regular. Además, en caso afirmativo, se pueden obtener los representantes de las clases laterales calculando la palabra asociada un caminos desde el nodo base hasta cada uno de los otros nodos.

**COROLARIO 1.2 (Fórmula de Schrier).** *Sea  $H$  un subgrupo de índice finito de un grupo libre finitamente generado  $F_A$ . Entonces*

$$rank(H) - 1 = |F_A : H|(rank(F_A) - 1)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\Gamma_A(H) = (E, V)$  el grafo de Stallings de  $H$ , y consideremos el conjunto de aristas bidireccionales  $E^+$ . Sabemos que  $rank(H) = |E^+| - |V| + 1$ . Sin embargo, como  $H$  tiene índice finito,  $\Gamma_A(H)$  es  $\bar{A}$ -regular, y por tanto todos los nodos tienen una arista incidente con cada pasible etiqueta.

$$\Rightarrow rank(H) - 1 = |E^+| - |V| = rank(F_A)|V| - |V| = |F_A : H|(rank(F_A) - 1)$$

□



# Capítulo 6

## Extensiones algebraicas de un subgrupo

Recordemos que una extensión de subgrupos  $H \leq K$  es algebraica si y solo si  $\forall L \subseteq F_A$  tal que  $H \leq L \leq_{ff} K$ , se cumple que  $L = K$ .

De nuevo, los grafos de Stallings nos permiten identificar si una extensión es o no algebraica. Sin embargo, este es el primero de los algoritmos que veremos cuyo coste no es polinómico, lo cual presentará graves limitaciones prácticas sobre el tamaño (número de nodos en el grafo de Stallings) de los subgrupos con los que podemos trabajar.

### 1. Orla de un subgrupo

DEFINICIÓN 1.1. Sean  $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$  y  $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$  dos grafos. Un morfismo de grafos es una aplicación  $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que, si  $(u, v, s) \in E_1$ , entonces  $(\varphi(u), \varphi(v), s) \in E_2$ .

LEMA 1.2 ([4]). Sean  $H, K$  dos subgrupos. Entonces  $H \leq K$  si y sólo si existe un morfismo de grafos  $\varphi_{H,K}$  de  $\Gamma_A(H)$  a  $\Gamma_A(K)$ . Si existe, este morfismo es único.

DEFINICIÓN 1.3. La  $A$ -orla de un subgrupo  $H$  es el conjunto de extensiones  $K$  de  $H$  tales que el morfismo  $\varphi_{H,K}$  es exhaustivo, y se denotará por  $\mathcal{O}_A(H)$ .

**1.1. Cálculo de la orla de un subgrupo.** Un morfismo de grafos exhaustivo queda determinado por una división de los nodos en subconjuntos. Supongamos que tenemos un grafo  $\Gamma$  y que hemos dividido sus nodos en  $k$  subconjuntos disjuntos. Podemos definir un grafo  $\Gamma_2$  con  $k$  nodos y una aplicación  $\varphi$  que envíe cada uno de los  $k$  subconjuntos a un nodo de  $\Gamma_2$ . Si ahora añadimos en  $\Gamma_2$  las aristas necesarias para que  $\varphi$  sea un morfismo de grafos, habremos construido un morfismo de grafos exhaustivo. Es fácil ver que todos los morfismos exhaustivos que parten de  $\Gamma$  se obtienen así.

Por tanto, podemos crear tantos morfismos exhaustivos de  $\Gamma$  a un grafo de orden  $k$  como formas hay de separar los  $|V|$  nodos de  $\Gamma$  en  $k$  subconjuntos distintos:

$$\left\{ \begin{matrix} |V| \\ k \end{matrix} \right\}$$

El número total de morfismos exhaustivos es

$$\sum_{k=1}^{|V|} \left\{ \begin{matrix} |V| \\ k \end{matrix} \right\} = B_{|V|}$$

Donde  $B_n$  es el  $n$ -ésimo número de Bell, que representa el número de formas de particionar un conjunto de  $n$  elementos. Este número escala muy rápidamente con  $n$ , por lo que para grafos con 12 o 13 nodos deja de ser computacionalmente asequible calcular todos los morfismos y grafos posibles.

Hay que tener en cuenta que no todos los grafos obtenidos en el procedimiento anterior darán lugar a un subgrupo de la  $A$ -*orla*, ya que muchos de ellos podrían no estar *folded*, y un *folding* en uno de estos (identificar dos nodos) equivale a identificar dos subconjuntos de la partición de la que se ha obtenido. Esto da lugar a otra partición y por tanto obtendríamos un grafo que ya está en el conjunto. En otras palabras, podemos descartar directamente todos los grafos que no están *folded*.

Lo que sí que podemos decir es que el cardinal de la  $A$ -*orla* está superiormente acotado por los números de Bell, y que por tanto la  $A$ -*orla* es finita.

**EJEMPLO 1.4.** *Sea  $H = \langle abcb, ca^{-1}b, a \rangle \leq F_A$  un subgrupo. Su grafo de Stallings tiene 4 nodos, por tanto existen  $B_4 = 15$  relaciones de equivalencia distintas entre sus nodos, cada una dando lugar a una aplicación exhaustiva. De todas ellas, tan sólo 4 dan lugar a grafos que sean *folded*, de los cuales se obtienen los subgrupos de la *orla* de  $H$ . Estos grafos se pueden ver en la Figura 4.*

## 2. Teorema de Takahasi

A simple vista, no existe ninguna relación entre la  $A$ -*orla* de un subgrupo y sus extensiones algebraicas. Sin embargo, la relación existe y se establecerá más tarde gracias al teorema de Takahasi.

**TEOREMA 2.1 (Takahasi).** *Sea  $F_A$  el grupo libre con base  $A$  y  $H \leq F_A$  un subgrupo finitamente generado. Entonces, existe una colección finita y calculable de extensiones de  $H$ ,  $\{H = H_0, H_1, \dots, H_n\}$  tal que para toda extensión  $K$  de  $H$ , existe un subgrupo de la colección que es factor libre de  $K$ ,  $H \leq H_i \leq_{ff} K \leq F_A$ . Cualquier colección de extensiones que cumpla esta propiedad es una familia de Takahasi.*

La demostración del teorema se puede ver en [4]. Además de la demostración del teorema se deduce inmediatamente que la  $A$ -*orla* de  $H$  satisface las condiciones requeridas por el teorema:  $\mathcal{O}_A(H)$  es una familia de Takahasi.

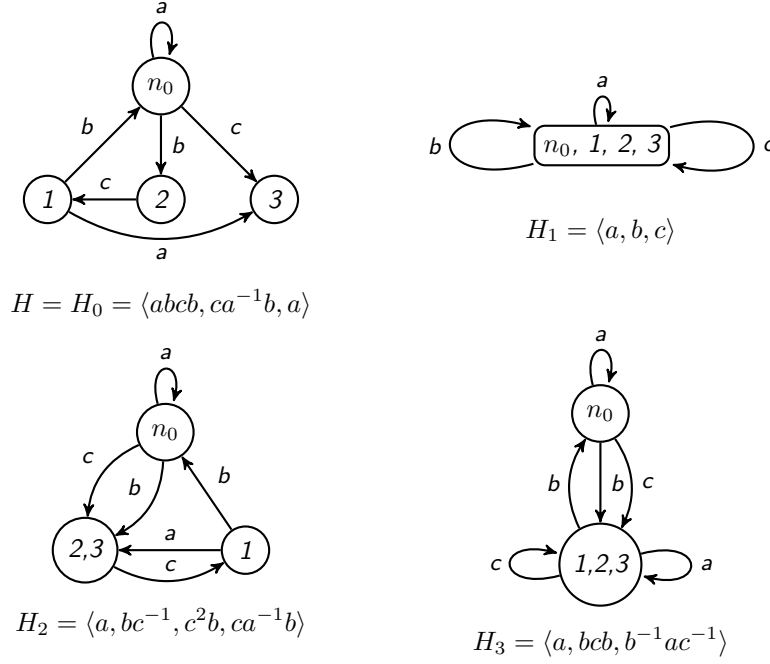


FIGURA 4. Grafos de Stallings correspondientes a los subgrupos de la  $A$ -orbita de  $H$

Evidentemente, no es la única. Si  $B$  es otra base de  $F_A$ , entonces la  $B$ -orbita,  $\mathcal{O}_B(H)$ , también es una familia de Takahasi. Además, podemos añadir tantos subgrupos como queramos a una familia de Takahasi sin que ésta deje de serlo.

Sin embargo, como veremos más tarde, existe una familia de Takahasi mínima, que además no depende de la base ambiente.

### 2.1. Subgrupos comprimidos.

DEFINICIÓN 2.2. Se dice que un subgrupo  $H \leq F_A$  es comprimido si para toda extensión  $H \leq K$ , se cumple que  $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(K)$ .

PROPOSICIÓN 2.3. Sea  $H$  un subgrupo y  $\mathcal{L}$  una familia de Takahasi de  $H$ . Supongamos que  $\forall K \in \mathcal{L}$ , se cumple que  $\text{rank}(H) \leq \text{rank}(K)$ . Entonces  $H$  es comprimido.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $K$  una extensión de  $H$ . Por ser  $\mathcal{L}$  una familia de Takahasi,  $\exists M \in \mathcal{L}$  tal que  $H \leq M \leq_{ff} K$ . Por tanto

$$\text{rank}(H) \leq \text{rank}(M) \leq \text{rank}(K)$$

□

Por tanto, para determinar si un subgrupo  $H$  es comprimido, basta con calcular una familia de Takahasi (por ejemplo  $\mathcal{O}_A(H)$ ), y comprobar que todos los elementos de la familia tienen rango mayor o igual que el de  $H$ .

### 3. Extensiones algebraicas

DEFINICIÓN 3.1. Denotaremos con  $AE(H)$  al conjunto de las extensiones algebraicas de  $H$ .

NOTA 3.2. Este conjunto es independiente de la base libre  $A$  escogida [4]. Es decir, sean  $H \leq K \leq F_A$  extensiones de grupos libres y sea  $\varphi \in \text{Aut}(F_A)$ , entonces  $H \leq_{alg} K \Leftrightarrow \varphi(H) \leq_{alg} \varphi(K)$ .

PROPOSICIÓN 3.3. El conjunto de las extensiones algebraicas  $AE(H)$  está contenido en toda familia de Takahasi de  $H$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{L}$  una familia de Takahasi de  $H$  y sea  $K \in AE(H)$ . Por ser  $\mathcal{L}$  una familia de Takahasi, entonces  $\exists M \in \mathcal{L}$  tal que  $H \leq M \leq_{ff} K$ . Como  $H \leq_{alg} K$ , entonces  $M = K$ , y por tanto  $K \in \mathcal{L}$ .  $\square$

Esta proposición nos proporciona el nexo entre las extensiones algebraicas de un subgrupo y su  $A$ -orla. Y es que por ser la  $A$ -orla una familia de Takahasi, se tiene que

$$AE(H) \subseteq \mathcal{O}_A(H)$$

De lo cual se deduce inmediatamente que, si  $H$  es finitamente generado, entonces el conjunto de sus extensiones algebraicas es un conjunto finito, ya que

$$|AE(H)| \leq |\mathcal{O}_A(H)| \leq B_{|V|} < \infty$$

PROPOSICIÓN 3.4. El conjunto de las extensiones algebraicas de  $H$  es el subconjunto de cualquier familia de Takahasi de  $H$  que no tiene factores libres dentro de la familia.

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{L}$  una familia de Takahasi de  $H$ .

Es evidente que una extensión algebraica de  $H$  no puede tener factores libres dentro de la familia, ya que de lo contrario no sería algebraica. Veamos ahora la otra inclusión.

Sea  $K \in \mathcal{L}$  tal que no contiene factores libres dentro de la familia. Sea ahora una extensión  $M$  de  $H$  tal que  $H \leq M \leq_{ff} K$ . Por definición de familia de Takahasi, existe un subgrupo  $N \in \mathcal{L}$  tal que  $H \leq N \leq_{ff} M$ . Como  $N \leq_{ff} M \leq_{ff} K$ , entonces  $N \leq_{ff} K$ , pero habíamos dicho que  $K$  no tenía factores libres dentro de la familia, por lo que  $N = K$  y  $M = K$ , de lo que se deduce que  $H \leq_{alg} K$ .  $\square$

PROPOSICIÓN 3.5. El conjunto de las extensiones algebraicas de  $H$  es la familia de Takahasi mínima para  $H$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{L}$  una familia de Takahasi de  $H$ , y sea  $K \in \mathcal{L}$  que cumpla que  $K \notin AE(H)$ . Entonces  $\exists M \in \mathcal{L}$  tal que  $M \leq_{ff} K$ , ya que de lo contrario  $K$  sería una extensión algebraica. Sea  $N$  una extensión de  $H$  tal que  $H \leq K \leq_{ff} N$ . Entonces  $H \leq M \leq_{ff} N$ , por lo que  $\mathcal{L} \setminus \{K\}$  también es una familia de Takahasi.  $\square$

Esta última proposición, a pesar de ser interesante, no es necesaria para calcular las extensiones algebraicas de un subgrupo. Para esto, tan sólo es necesario saber que están contenidas en cualquier familia de Takahasi, y que además son el subconjunto de los elementos que no tienen factores libres dentro de la familia.

En concreto, en este mismo capítulo se ha explicado cómo calcular explícitamente una familia de Takahasi:  $\mathcal{O}_A(H)$ . Por tanto, para calcular el conjunto de las extensiones algebraicas basta con calcular la *A-orla* de  $H$ , y para cada elemento de está comprobar si algún otro elemento es factor libre. De hecho, existe una conjetura que relaciona más directamente el conjunto de las extensiones algebraicas con la *orla*.

CONJETURA 3.6.

$$AE(H) = \bigcap_{B \text{ base}} \mathcal{O}_B(H)$$

Dada una extensión  $H \leq K$ , en el capítulo siguiente se indicará cómo es posible identificar si  $H \leq_{ff} K$ .



# Capítulo 7

## Morfismos de grupos libres

Dados dos grupos  $(G, \cdot)$  y  $(H, *)$ , una aplicación  $\varphi : G \rightarrow H$  es un *morfismo* si

$$\forall x, y \in G \quad \varphi(xy) = \varphi(x) * \varphi(y)$$

Si los dos grupos son el mismo entonces  $\varphi$  es un endomorfismo. Denotaremos por  $Aut(G)$  al conjunto de los automorfismos de  $G$ .

Para definir un morfismo es suficiente con definirlo sobre un conjunto de generadores del grupo. Dado un grupo libre  $F_A$  y  $\varphi \in Aut(F_A)$ , la imagen de  $F_A$  por  $\varphi$  es un subgrupo de  $F_A$

$$\varphi(F_A) = \langle \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_r) \rangle \leq F_A$$

El hecho de que la imagen de un morfismo sea un subgrupo dentro del grupo de llegada nos permitirá conocer algunas propiedades de los morfismos aplicando las propiedades de los subgrupos que hemos visto a lo largo de los capítulos anteriores.

### 1. Automorfismos biyectivos

Para saber si un endomorfismo es biyectivo, es suficiente con comprobar que es exhaustivo (por ser automorfismo, el rango del grupo de salida y el de llegada es el mismo).

Esto se puede comprobar fácilmente. Es suficiente con ver que

$$a_i \in \langle \varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_r) \rangle \quad \forall i \in [r]$$

Y en el capítulo 3 se ha visto cómo comprobar si un elemento pertenece a un subgrupo.

En caso de biyectividad, también podemos calcular el morfismo inverso. Basta con utilizar, para cada elemento  $a_i$  de la base, el algoritmo explicado en el capítulo 3 para calcular una representación de  $a_i$  en función de la base del subgrupo (se puede porque hemos comprobado que  $a_i$  está en la imagen). De esta forma, obtenemos

$$a_i = \prod_{j=1}^{l_i} \varphi(a_{k_{ij}}) \Rightarrow \varphi^{-1}(a_i) = \varphi^{-1} \left( \prod_{j=1}^{l_i} \varphi(a_{k_{ij}}) \right) \Rightarrow \varphi^{-1}(a_i) = \prod_{j=1}^{l_i} a_{k_{ij}}$$

Y por tanto tenemos el morfismo inverso definido en función de la base del grupo.

## 2. Automorfismos de Whitehead

El conjunto de los automorfismos del grupo libre,  $Aut(F_A)$ , es finitamente generado [6].

Un posible conjunto finito de generadores son los *automorfismos de Whitehead*, definidos en función de la base  $A$  del grupo libre. Hay dos tipos de automorfismos de Whitehead.

**2.1. Automorfismos de Whitehead de primera especie.** Son los automorfismos de Whitehead que permutan el conjunto  $\bar{A}$ .

Cada uno de ellos está unívocamente determinado por una permutación  $\sigma \in S_r$  y por una tupla  $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_r) \in \{0, 1\}^r$ . Por tanto, hay  $r!2^r$  automorfismos de Whitehead de primera especie. El automorfismo se define para los elementos de la base como

$$\varphi_{\sigma, \epsilon}(a_i) = a_{\sigma(i)}^{\epsilon_i}$$

Observemos que estos son los automorfismos de  $F_A$  que no alteran la longitud de las palabras. Es decir, los automorfismos  $\varphi$  tales que  $|\varphi(u)| = |u| \forall u \in F_A$ .

**2.2. Automorfismos de Whitehead de segunda especie.** Dado  $s \in \bar{A}$ , se define un *s-corte* de  $\bar{A}$  como un subconjunto  $B \subset \bar{A}$  tal que  $s \in B$  pero  $s^{-1} \notin B$ .

Un automorfismo de Whitehead de segunda especie queda unívocamente determinado por  $s \in \bar{A}$  y un *s-corte*  $B$ .

El automorfismo se define como  $\varphi_{s, B}(s) = s$ , y si  $a_i \in A \setminus \{s, s^{-1}\}$ :

$$\varphi_{s, B}(a_i) = s^\alpha a_i s^\beta \text{ donde } \alpha = \begin{cases} -1 & s^{-1} \in B \\ 0 & s^{-1} \notin B \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} 1 & s \in B \\ 0 & s \notin B \end{cases}$$

Además, consideraremos inválido el *s-corte* definido por  $B = \{s\}$ , ya que el morfismo que define es la identidad. Ninguno de los otros morfismos de Whitehead de segunda especie mantiene la longitud de las palabras.

El número de morfismos de Whitehead de segunda especie es  $2r(2^{2r-2} - 1)$ .

## 3. Problema de Minimización de Whitehead

El problema de minimización de Whitehead consiste en encontrar una palabra de tamaño mínimo dentro de la órbita de una palabra  $w$  por automorfismos.

Es decir, consiste en encontrar  $w_m \in F_A$  tal que  $\exists \varphi \in Aut(F_A)$  que cumpla  $\varphi(w) = w_m$  y

$$|w_m| = \min_{\psi \in Aut(F_A)} \{|\psi(w)|\}$$



**TEOREMA 3.1** (Whitehead, [6]). *Sea  $w \in F_A$ . Si existe un automorfismo  $\varphi \in \text{Aut}(F_A)$  tal que  $|\varphi(w)| < |w|$ , entonces también existe un automorfismo de Whitehead  $\varphi_W$  tal que  $|\varphi_W(w)| < |w|$ .*

Supongamos que tenemos una palabra  $w \in F_A$  y que queremos resolver el problema de minimización de Whitehead para  $w$ . Un primer enfoque del problema consistiría en probar todos los morfismos de Whitehead de segunda especie (los de primera especie no es necesario probarlos, ya que mantienen constante la longitud de las palabras) hasta encontrar uno que reduzca la longitud de  $w$ , y entonces repetir el proceso. Cuando no exista ningún morfismo de Whitehead que reduzca la longitud, entonces tenemos una palabra que tiene la longitud mínima dentro de la órbita de  $w$ , y por tanto hemos resuelto el problema.

Sin embargo, este algoritmo no es bueno, ya que existe un número de morfismos de Whitehead exponencial en el rango del grupo libre. Este factor exponencial se puede evitar, como se explicará en la siguiente sección, por medio de la elección del Whitehead adecuado.

## 4. Whitehead de máximo descenso

En vistas de la palabra  $w$  para la cual se quiere resolver el problema de minimización de Whitehead se puede escoger, mediante un algoritmo de coste polinómico, el morfismo de Whitehead de segunda especie que reduzca en mayor cantidad la longitud de  $w$ .

Para ello, es necesario introducir la siguiente definición.

**DEFINICIÓN 4.1.** *Se define cómo grafo de  $w \in F_A$  a un par  $G_w = (N, \kappa_w)$ .  $N$  es el conjunto de nodos, y contiene  $2r$  ( $r$  es el orden de  $F_A$ ) nodos, a cada uno de los cuales nos referiremos utilizando un elemento de  $\bar{A}$ .  $\kappa_w$  es un aplicación  $\kappa_w : N \times N \rightarrow \mathbb{N}$ . Si  $w = s_1 s_2 \dots s_n$  y definimos  $s_{n+1} = s_1$ , entonces  $\kappa_w(a_{i_1}^{\epsilon_1}, a_{i_2}^{\epsilon_2})$  es el número de valores de  $k \in [n]$  tales que  $s_k = a_{i_1}^{\epsilon_1}$  y  $s_{k+1} = a_{i_2}^{-\epsilon_2}$  o viceversa (podría no haber ninguno). Al número  $\kappa_w(a_{i_1}^{\epsilon_1}, a_{i_2}^{\epsilon_2})$  se le denomina la capacidad entre  $a_{i_1}^{\epsilon_1}$  y  $a_{i_2}^{\epsilon_2}$ .*

**DEFINICIÓN 4.2.** *Sea  $s \in N$  un nodo de  $G_w$ . Se define el grado de  $s$  como*

$$\text{deg}_w(s) = \sum_{j=1}^r \kappa_w(s, a_j) + \sum_{j=1}^r \kappa_w(s, a_j^{-1})$$

**DEFINICIÓN 4.3.** *Sea  $s \in \bar{A}$  y sea  $B \subset \bar{A}$  un  $s$ -corte de  $\bar{A}$ . Se define la capacidad de  $B$  como*

$$\text{Cap}_w(B) = \sum_{s \in B} \sum_{t \notin B} \kappa_w(s, t)$$

Junto con su teorema, Whitehead describió una relación entre la forma de una palabra  $w$  y el decremento en su longitud al aplicar un morfismo de Whitehead determinado. La siguiente fórmula es una reinterpretación dada en [6] de esta relación, escrita en función de los parámetros que acabamos de definir en el grafo de  $w$ .

TEOREMA 4.4. *Sea  $w \in F_A$ , sea  $s \in \bar{A}$  un nodo de  $G_w$  y sea  $B$  un  $s$ -corte de  $\bar{A}$ . Entonces*

$$|\varphi_{s,B}(w)| - |w| = \text{Cap}_w(B) - \text{deg}_w(s)$$

Queremos minimizar  $|\varphi_{s,B}(w)| - |w|$ . Para cada  $s \in \bar{A}$ , buscaremos el  $s$ -corte  $B$  tal que  $\text{Cap}_w(B)$  sea mínimo, que nos dará el mejor Whitehead posible con esa elección de  $s$ . Basta con escoger la mejor de estas  $2r$  opciones.

Si recordamos el teorema del *max-flow min-cut*, podemos ver que para resolver el problema de encontrar un  $s$ -corte de capacidad mínima, es equivalente encontrar un flujo máximo de  $s$  a  $s^{-1}$  en el grafo  $G_w$ .

Existen algoritmos polinómicos que resuelven el problema de encontrar el flujo máximo, como por ejemplo el *Ford-Fulkerson* o el *Dinic*.

## 5. Identificación de factores libres

Existe una generalización del teorema 3.1 para conjuntos de palabras.

TEOREMA 5.1. *Dada una colección finita de palabras  $w_1, w_2, \dots, w_n \in F_A$ , si existe un automorfismo  $\varphi \in \text{Aut}(F_A)$  tal que*

$$|\varphi(w_1)| + |\varphi(w_2)| + \dots + |\varphi(w_n)| < |w_1| + |w_2| + \dots + |w_n|$$

*Entonces existe un automorfismo dentro del conjunto de los automorfismos de Whitehead que lo cumple.*

Sea ahora  $K = \langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$  un subgrupo de  $F_A$  finitamente generado y  $H \leq K$  una extensión, y queremos comprobar si  $H$  es factor libre de  $K$ . Para ello, el primer paso es escoger una base ambiente adecuada.  $K$  es el grupo libre  $F_{\{g_1, g_2, \dots, g_k\}}$  y  $H$  es un subgrupo suyo de rango  $n$ . Asumiremos  $n \leq k$ , ya que de lo contrario es inmediato decir que  $H$  no es un factor libre.

Sean  $w_1, w_2, \dots, w_n$  un conjunto de generadores de  $H$  escritos en la nueva base (en función de los  $g_i$ ). Para identificar si  $H$  es un factor libre de  $K$ , basta con resolver el problema de minimización de Whitehead para el conjunto de palabras  $w_1, w_2, \dots, w_n$ . Si la longitud mínima para este conjunto es  $n$  ( $1 + 1 + \dots + 1$ ), entonces  $H$  es un factor libre de  $K$ , y en caso contrario no lo es.

El problema de minimización se puede resolver, por ejemplo, utilizando el primer algoritmo explicado para ello. Se prueban todos los posibles morfismos de Whitehead de segunda especie hasta que se encuentre alguno que reduzca la longitud total. Nótese que, en cada paso, la longitud de una palabra en concreto puede aumentar, pero la longitud total debe disminuir. Cuando ningún morfismo de Whitehead sea capaz de disminuir la longitud total del conjunto, entonces se ha alcanzado el mínimo.

**Parte 3**

**Implementación**



# Capítulo 8

## Descripción y uso del programa

Gran parte de los algoritmos descritos en este trabajo se han llevado a la práctica mediante el desarrollo de un programa *open source* escrito en C++. El programa lleva incorporada la licencia *GNU General Public License* (GPL). Esta es actualmente la licencia más utilizada. Permite el uso de la totalidad o partes del código en otros proyectos bajo la condición de que estos también utilicen este tipo de licencia.

En principio, el código se ha desarrollado teniendo como intención su uso como librería. Sin embargo, se puede ejecutar independientemente por medio de una interfaz rudimentaria.

El código del programa se puede ver en

<https://github.com/angargo/Stallings>

### 1. Crear subgrupos

Para definir un subgrupo dentro del programa, se usa la secuencia

```
subgroup <nombre del subgrupo> <número de generadores>
```

Y a continuación escribir los generadores del subgrupo en líneas separadas.

El programa asume que la base libre será  $\{a, b, c, d, e, \dots\}$ , y usa notación de suma, por ejemplo  $-a$  sería  $a^{-1}$ ,  $2a$  sería  $a^2$  y  $-2a$  sería  $a^{-2}$ . El elemento neutro 1 se representa con 0. Es necesario insertar espacios entre los distintos factores.

Por ejemplo, para definir el grupo  $H = \langle abcb, ca^{-1}b, a \rangle$ , utilizaríamos:

#### Input

```
subgroup H 3
a b c b
c -a b
a
```

#### Output

```
H = <
(a b c b),
(c -a b),
(a),
>
```

## 2. Pertenencia

Para comprobar si una palabra  $w$  forma parte de un subgrupo  $H$ , se utiliza la instrucción

```
member <nombre del subgrupo>
```

Seguida de la palabra  $w$  de la cual se quiere comprobar si está en  $H$ . Es necesario que  $H$  haya sido introducido en el programa previamente.

El programa responderá si la palabra forma parte o no del subgrupo, y en caso afirmativo nos mostrará cómo representarla en función de los generadores con los que se ha definido inicialmente el subgrupo.

El ejemplo mostrado en el capítulo 3 sería:

<b>Input</b>	<b>Output</b>
subgroup H 3 a b a b 2a -b a b a b	H = < (a b a), (b a a -b), (a b a b), >
member H a -b a	(a -b a) is a member of H (-b -a -b -a)(a b a)(b a a -b)(-a - b -a)(a b a b)(-a -b -a)(-b -a -b -a)(a b a)(b a a -b)(-a -b - a)(a b a b) Product: a -b a
member H a 2b	(a b b) is NOT a member of H

## 3. Intersección

Con el algoritmo explicado en el capítulo 4 se puede calcular la intersección de dos subgrupos. Para ello, se usa la secuencia

```
member <nombre1> <nombre2> <nombre3>
```

Donde <nombre1> y <nombre2> son los nombres de dos subgrupos previamente introducidos en el programa, y <nombre3> es el nombre que queremos que el programa le de al subgrupo intersección.

A continuación, se muestra el ejemplo utilizado en el capítulo 4.

<b>Input</b>	<b>Output</b>
<pre> subgroup H 3 b 3a 2a b a -b a </pre>	<pre> H = &lt; (b), (a a a), (a a b a -b a), &gt; </pre>
<pre> subgroup K 3 3a a b 2a b a </pre>	<pre> K = &lt; (a a a), (a b), (a a b a), &gt; </pre>
<pre> intersection H K L </pre>	<pre> Intersecting H K L = &lt; (a a a), (-b a a a b), (-a b a -b a b -a b -a -b a), (-a b a -b a a a b -a -b a), (-a b a a a -b a), &gt; </pre>

## 4. Índice

Para indicarle al programa que se quiere calcular el índice del subgrupo denotado por `<nombre>` se utiliza el comando

```
index <nombre>
```

El programa responderá con el valor del índice del subgrupo dentro del grupo libre  $F_A$  definido de la siguiente manera: si  $s$  es la letra lexicográficamente mayor utilizada para definir el subgrupo, entonces el programa calculará su índice en  $F_{\{a,b,\dots,s\}}$ .

En el caso de que el índice sea finito, el programa nos dará también un conjunto de representantes de las clases laterales.

**Input**

```

subgroup M 5
b a -b
a b
2b -a
-a b a
3a

```

```

index M

```

```

subgroup N 2
a
b a -b

```

```

index N

```

**Output**

```

M = <
(b a -b),
(a b),
(b b -a),
(-a b a),
(a a a),
>

Subgroup M has index: 4
(0)
(b)
(a)
(-a)

```

```

N = <
(a),
(b a -b),
>

```

```

Subgroup N has index: Infinite

```

## 5. Orla

Como hemos visto antes, el cálculo de la *orla* es el primero de los algoritmos mencionados que no es polinómico en el tamaño de la entrada. Por tanto, hay que tener cierta cautela a la hora de pedirle al programa que calcule la *orla* de un subgrupo: si el grafo de Stallings del subgrupo indicado tiene demasiados nodos (del orden de 12 nodos) entonces el programa no acabará nunca.

La instrucción utilizada para calcular la *orla* de un subgrupo es

```
fringe <nombre>
```

El programa escribirá entonces la lista de las extensiones del subgrupo que forman su *orla*.



**Input**

```

subgroup H 3
a b c b
c -a b
a

```

```

fringe H

```

**Output**

```

H = <
(a b c b),
(c -a b),
(a),
>

```

```

Fringe of subgroup H

```

```

<
(b),
(c),
(a),
>
<
(a),
(b b),
(-b c b),
(-b a -c),
>
<
(a),
(b -c),
(c c b),
(c -a b),
>
<
(a),
(b c b),
(-b a -c),
>

```



## Bibliografía

- [1] Pep Burillo, Estructures Algebriques (2012-2013)
- [2] A. Myasnikov, Notes on Free Groups, *Math 990 Topics in Topology* (2008).
- [3] John R. Stallings, Topology of Finite Graphs, *Inventiones Math*, 71, p551-565 (1983).
- [4] A. Myasnikov, E. Ventura, P. Weil, Algebraic extensions in free groups, *Algebra and Geometry in Geneva and Barcelona, Trends in Mathematics*, Birkhäuser, p225-253 (2007).
- [5] R. D. Wade, Folding free-group automorphisms, *Q J Math*, 65, p291-304 (2014).
- [6] A. Roig, E. Ventura, P. Weil, On the Complexity of the Whitehead Minimization Problem, *International Journal of Algebra and Computation*, 17 (2007).
- [7] H. Neumann, On the intersection of finitely generated free groups, Addendum, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, vol. 5, p128 (1957).
- [8] I. Kapovich, A. Myasnikov, Stallings foldings and subgroups of free groups, *Journal of Algebra*, vol. 248, p608-668 (2002).