ETS Minas: Métodos matemáticos

Guía de estudio

Tema 4 Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Cataluña

Octubre 2008, versión 1.1

# 1 Introducción

En el tema anterior comentábamos que en la modelización y resolución de problemas técnicos es muy frecuente la aparición de ecuaciones. De hecho, la situación más usual en la práctica es que tengamos que enfrentarnos a la resolución simultánea de varias ecuaciones que comparten las mismas incógnitas, esto es, la resolución de *sistemas de ecuaciones*.

En una primera clasificación podemos distinguir entre *sistemas de ecuaciones lineales* y *sistemas de ecuaciones no lineales*. En un sistema de ecuaciones lineales, todas las ecuaciones son de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden representarse usando matrices en la forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y, en este caso, disponemos de métodos exactos (regla de Cramer, método de Gauss) que, en principio, nos permitirían resolver el sistema despejando las incógnitas. Sin embargo, la resolución numérica de un buen número de problemas prácticos (difusión de calor, deformación de materiales, etc) conduce a sistemas de ecuaciones lineales donde el número de ecuaciones e incógnitas puede ser de varios miles, incluso millones. En estos casos, donde los métodos tradicionales resultan inoperantes, podemos intentar aproximar la solución mediante un método iterativo.

En un sistema de ecuaciones no lineales, alguna ecuación es no lineal. La resolución exacta de un sistema no lineal puede ser imposible incluso para sistemas con solo dos ecuaciones con dos incógnitas. No obstante, en algunos casos podemos construir un método iterativo que aproxime una solución a partir de una estimación inicial.

Empezaremos construyendo el *método iterativo general* para sistemas lineales, que es una especie de formulación de *punto fijo* para la ecuación matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Veremos dos casos particulares del método iterativo general: el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel. A continuación introduciremos las *normas vectoriales* y las *normas matriciales* y las emplearemos en el estudio de la convergencia del método iterativo matricial y en la construcción de una cota superior de error. Para finalizar, veremos la

versión multidimensional del *método de Newton-Raphson* para sistemas de ecuaciones no lineales.
Desde el punto de vista computacional, estudiaremos las librería *linalg* de Maple que contiene ordenes para operar matrices, veremos como solucionar sistemas de ecuaciones lineales con *linsolve* y sistemas de ecuaciones no lineales con *solve* y *fsolve*. Finalmente, escribiremos los programas que nos permiten ejecutar un método iterativo lineal.
El contenido del tema es el siguiente:

1. Método iterativo para sistemas lineales
2. Método de Jacobi y de Gauss-Seidel
3. Normas vectoriales y matriciales
4. Convergencia del método iterativo lineal
5. Método de Newton-Raphson para sistemas no lineales

# 2 Objetivos

## 2.1 Teóricos

Al finalizar el tema, el alumno debe se capaz de

- Formular en forma matricial un sistema de ecuaciones lineales.
- Dado un sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y la matriz del método $\mathbf{N}$, construir el método iterativo
$$\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{c}.$$
- Formular en forma matricial el método iterativo de Jacobi correspondiente a un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- Formular en forma matricial el método iterativo de Gauss-Seidel correspondiente a un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
- Definir norma vectorial y aplicar sus propiedades.
- Definir y calcular las normas vectoriales $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$.
- Definir sucesión vectorial convergente.
- Definir y calcular la norma de infinito de una matriz.
- Escribir y aplicar las propiedades de la norma de infinito de una matriz.

- Aplicar el Teorema de convergencia para determinar la convergencia del método iterativo matricial $\mathbf{x}^{(j+1)} = \mathbf{M}\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{c}$.
- Escribir y aplicar la cota de error de una paso.
- Escribir y aplicar la cota de error de $j$ pasos.
- Diferenciar entre sistemas lineales y no lineales.

### 2.2 Cálculo manual

Al finalizar el tema, el alumno debe se capaz de

- Resolver sistemas lineales de pequeña dimensión usando la regla de Cramer.
- Resolver sistemas lineales de pequeña dimensión usando el método de Gauss.
- Calcular la inversa de una matriz de pequeña dimensión por el método de Gauss-Jordan.
- Dado un sistema de pequeña dimensión $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y un vector inicial $\mathbf{x}_0$.
  - Construir el método iterativo matricial indicado (Jacobi, Gauss-Seidel, método correspondiente a la matriz $\mathbf{N}$.) y estudiar la convergencia.
  - Calcular algunas iteraciones a partir de un vector inicial $\mathbf{x}_0$.
  - Calcular acotaciones de error mediante la *cota de error de un paso* y la *cota de error de $j$ pasos.*
  - Determinar el número de pasos necesario para obtener una solución aproximada con $t$ decimales exactos.

### 2.3 Cálculo con ordenador

Al finalizar el tema, el alumno debe se capaz de

- Definir matrices con **matrix**.
- Definir vectores.
- Recuperar y asignar valores individuales de una matriz y de un vector.
- Mostrar el contenido de una matriz con **print**.
- Realizar operaciones aritméticas con matrices.
- Usar **evalm** para forzar la evaluación de expresiones matriciales.

- Aplicar funciones sobre los elementos de una matriz con **map**.
- Calcular la evaluación decimal de una matriz con **evalf**.
- Cargar la librería **linalg**.
- Calcular inversas , transpuestas y determinantes.
- Calcular normas vectoriales con **norm**.
- Resolver sistemas de ecuaciones lineales con **linsolve**.
- Escribir un programa controlado por un bucle **for** que permita construir y aplicar un método iterativo matricial.
- Resolver sistemas de ecuaciones no lineales con **solve**.
- Resolver aproximadamente un sistema no lineal con **fsolve**.

## 3 Orientaciones para el estudio

Teniendo en cuenta el tiempo disponible, nos centraremos en la resolución de sistemas lineales y dejaremos como actividad complementaria el estudio detallado del método de Newton-Raphson para sistemas no lineales.

- Resuelve manualmente los ejemplos del *Resumen de clase* correspondientes a las secciones 1–4.
- Resuelve con papel y lápiz los ejercicios 1,2,3,4,6,10,12 y el apartado 3 de los ejercicios 5 y 7. Ten en cuenta los siguientes comentarios:
  - Asegúrate que sabes aplicar la Regla de Cramer para sistemas de dimensión 2 y 3.
  - Asegúrate que sabes invertir una matriz usando el método de Gauss-Seidel.
  - Es importante que realices todos los cálculos intermedios que aparecen en los problemas propuestos. Esto te ayudará a comprender mejor todos los detalles de los métodos y, además, te permitirá adquirir mayor destreza en la realización de secuencias largas de cálculos simples.
  - Asegúrate que sabes calcular la norma de infinito de una matriz.
  - Asegúrate que distingues entre la cota de error en un paso y la cota de error en $j$ pasos.
  - Asegúrate que sabes determinar el número de pasos necesarios para obtener $t$ decimales exactos.

- Recuerda que después de asistir a la clase práctica, tienes que imprimir la practica y volver a hacerla tú solo.
- Resuelve con Maple los ejercicios 5,7.
- En la programación de los diferentes métodos, es importante que comprendas el funcionamiento de las versiones que realizan una parada automática al alcanzar el número de decimales exactos prefijado; no obstante, en los exámenes de prácticas sólo se pedirán versiones controladas por número de iteraciones, esto es controladas por un bucle **for** (sin control de error estimado).

## 4 Temporalización

Aproximadamente, el tiempo necesario para cubrir el tema es el siguiente:

| Actividad | Tipo | Duración | |
|---|---|---|---|
| Explicación teórica, ejemplos | Clase teoría | 2h | |
| Ejemplos, problemas | Clase prácticas | 1h | |
| Prácticas ordenador | Clase prácticas | 2h | 4h |
| Leer guia estudio, resumen | Trabajo personal | 0,75h | |
| Problemas a mano | Trabajo personal | 1,5h | |
| Hacer práctica | Trabajo personal | 0,75h | |
| Poblemas con Maple | Trabajo personal | 0,75h | |
| Cuestionario | Trabajo personal | 0,25 | 4h |

## 5 Actividades complementarias

Si dispones de tiempo, puedes realizar alguna de las siguientes actividades..

- Revisa la *Resolución de ejercicios con Maple* correspondiente al tema.
- Resuelve el problema 8. Resuelve los problemas 13 y 14 sobre *dominancia diagonal.*
- Estudia la sección correspondiente al Método de Newton-Raphson para sistemas no lineales y realiza manualmente los ejemplos.
- Estudia la programación con Maple del Método de Newton-Raphson para sistemas no lineales.

# Cuestionario Tema 4: Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones

Alumno: ________________________________________

1. Asistencia a clase. Indica si has asistido a todas las clases de teoría y prácticas correspondientes al tema, en caso de no asistencia indica si has dedicado un tiempo equivalente de estudio personal. Finalmente, indica (si procede) el número de horas de clase perdidas que no hayas recuperado mediante estudio personal.

| | Asistencia | | Recuperado | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Si | No | Si | No | En parte | Horas perdidas |
| Clases de teoria | | | | | | |
| Clases de práctica | | | | | | |

2. Tiempo de estudio personal

| | Tiempo |
|---|---|
| Lectura de guía de estudio y resumen | |
| Hacer problemas a mano | |
| Hacer práctica | |
| Hacer problemas con Maple | |

3. Puntúa la utilidad de los documentos de estudio entre 1 (= es una pérdida de tiempo) y 5 (=muy útiles). Si no has descargado el documento, deja la casilla en blanco.

| | Puntuación |
|---|---|
| Guía de estudio | |
| Resumen | |
| Problemas | |
| Problemas resueltos | |
| Problemas resueltos con Maple | |
| Práctica | |

4. Revisa la lista de objetivos y escribe dos o tres tópicos que te gustaría que se volvieran a explicar en clase.

   ________________________________________________
   ________________________________________________
   ________________________________________________

5. Revisa la lista de objetivos y da una estimación intuitiva entre 1 y 5 de tu grado de cumplimiento de esos objetivos. ____________

6. Sugerencias: