Cálculo científico y técnico con HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 1: **Funcionamiento básico**
Tema 1.6 **Números Complejos**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Febrero 2008, versión 1.4.

Contenido

Índice General

1 Números complejos

1.1 Forma binómica

Un número *complejo en forma binómica* es una expresión de la forma

$$z = a + bi,$$

donde a y b son números reales y i representa la unidad imaginaria.

$$i = \sqrt{-1}.$$

Representamos por $\mathbb{C}$ el conjunto de todos los números complejos

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dado el complejo $z = a + bi$, decimos que:

- a es la *parte real* de z,
- b es la *parte imaginaria* de z,
- z es *real* si su parte imaginaria es nula, esto es, si $b = 0$,
- z es *imaginario puro* si su parte real es nula, esto es, si $a = 0$.

Ejemplo 1.1 *Complejos, parte real y parte imaginaria.*

Dados los complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3$, $z_3 = 5i$, tenemos que:

- La parte real de z_1 es 2.
- La parte imaginaria de z_1 es 3.
- z_2 es real.
- z_3 es imaginario puro. $\square$

Ejemplo 1.2 *Soluciones complejas de una ecuación.*

Los números complejos aparecen de forma natural en la resolución de ecuaciones polinómicas. Consideremos la ecuación

$$z^2 + 2z + 4 = 0.$$

En principio, obtenemos

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2}.$$

Sabemos que no existe ningún número real con cuadrado negativo, por lo tanto $\sqrt{-12}$ no es un número real y la ecuación no tiene soluciones en el conjunto de los números reales. Si permitimos que z tome valores complejos, resulta

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{12}\sqrt{-1}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}i}{2} = -1 \pm \sqrt{3}i. \quad \square$$

Actividad 1.1 *Resuelve manualmente la ecuación* $z^2 + 2z + 3 = 0$.
Sol. $z = -1 \pm \sqrt{2}i$.

Actividad 1.2 *Resuelve manualmente la ecuación* $z^2 + z + 1 = 0$.
Sol. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$.

1.2 Forma cartesiana

La representación en *forma cartesiana*[1] del complejo

$$z = a + bi$$

es un par ordenado de números reales

$$z = (a, b).$$

Ejemplo 1.3 *Forma cartesiana y forma binómica.*

Forma binómica	Forma cartesiana
$z = 2 + 3i$	$z = (2, 3)$
$z = i$	$z = (0, 1)$
$z = 2$	$z = (2, 0)$
$z = 2 - 3i$	$z = (2, -3)$

□

Actividad 1.3 *Resuelve manualmente la ecuación* $z^2 + 2 = 0$ *y escribe las soluciones en forma cartesiana.*
Sol: $\left(0, \sqrt{2}\right), \left(0, -\sqrt{2}\right)$.

1.3 Módulo y argumento

El *módulo* del número complejo

$$z = a + bi$$

es el número real

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Para el número complejo

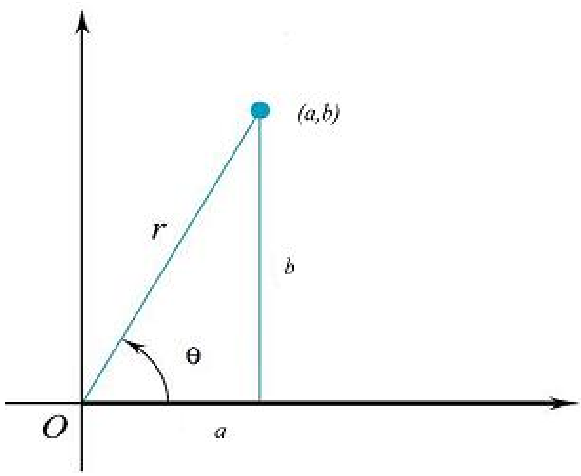
$$z = 2 + 3i,$$

obtenemos

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} = 3.605551.$$

Observa que si z es real, entonces el módulo coincide con el valor absoluto de la parte real.
El *argumento* del complejo $z = a + bi$ es el ángulo que forma el vector (a, b) con el eje OX^+. El módulo puede interpretarse como el módulo del vector (a, b).

[1] También se denomina forma rectangular.



La determinación del argumento es más complicada que la del módulo. Es preciso considerar cuatro casos distintos.

- *Complejo con parte real positiva.* Si $a > 0$ (z en primer o cuarto cuadrante), podemos obtener un valor del argumento usando la función arco tangente
$$\theta = \arg z = \arctan \frac{b}{a}.$$
- *Complejo imaginario puro con parte imaginaria positiva.* Si $a = 0$ y $b > 0$, es $\theta = \pi/2$ rad.
- *Complejo imaginario puro con parte imaginaria negativa.* Si $a = 0$ y $b < 0$, es $\theta = -\pi/2$ rad.
- *Parte real negativa.* Cuando $a < 0$ (z en segundo o tercer cuadrante), un valor del argumento es
$$\theta = \arg z = \left(\arctan \frac{b}{a}\right) + \pi \text{ rad}.$$

Ejemplo 1.4 *Calcula el módulo y el argumento de los complejos*

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = -1 + i, \quad z_3 = -3i.$$

Los módulos son

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = 2, \quad |z_2| = \sqrt{1+1} = 2, \quad |z_3| = \sqrt{0+9} = 3.$$

Para calcular el argumento, debemos tener en cuenta si la parte real es positiva, negativa o nula.

- Para $z_1 = 1 + i$, la parte real es positiva, por lo tanto
$$\arg z_1 = \arctan \frac{1}{1} = \pi/4 \; rad = 45^o.$$
- Para $z_2 = -1 + i$, la parte real es negativa, por lo tanto
$$\arg z_2 = \left(\arctan \frac{1}{-1} \right) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4 \text{ rad} = 135^o.$$
- Para $z_3 = -3i$, la parte real es nula y el argumento sólo puede ser $\pi/2$ o $-\pi/2$, como la parte imaginaria es negativa, obtenemos
$$\arg z_3 = -\pi/2 \text{ rad} = -90^o. \quad \square$$

Actividad 1.4 *Determina manualmente el módulo y el argumento de los complejos*
$$z_1 = 2, \quad z_2 = 1 + 2i, \quad z_3 = -1 + 3i.$$
Expresa el argumento en radianes y grados[2]*.*
Sol. $r_1 = 2$, $\theta_1 = 0 \, rad$; $r_2 = \sqrt{5}$, $\theta_2 = 1.1071 rad = 63.43^o$; $r_3 = \sqrt{10}$, $\theta_3 = 1.89 \; rad = 108.43^o$.

1.4 Obtención de la forma cartesiana a partir del módulo y el argumento

Si conocemos el módulo r y el argumento θ de un número complejo
$$r = |z| \, , \quad \theta = \arg z,$$
entonces podemos obtener la parte real e imaginaria como sigue
$$\begin{cases} a = r \cos \theta, \\ b = r \sin \theta. \end{cases}$$

Ejemplo 1.5 *Forma binómica a partir del módulo y el argumento. Determina el complejo que tiene módulo $r = 3$ y argumento $\theta = 25^o$.*

El complejo es de la forma
$$z = a + bi,$$
con
$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta = 3 \cos 25^o = 2.7189, \\ b &= r \sin \theta = 2 \sin 25^o = 1.2679, \end{aligned}$$
por lo tanto
$$z = 2.7189 + 1.2679i. \quad \square$$

Actividad 1.5 *Determina la forma binómica del número complejo que tiene módulo $r = 1.34$ y argumento $\theta = 2.12 \, rad$.*
Sol. $z = -0.6995 + 1.1429i$.

[2] El comando [R→D] realiza la conversión de radianes a grados. Puedes encontrar el comando en la tercera página del menú [MTH][REAL].

1.5 Forma polar

Un número complejo queda perfectamente determinado si conocemos su módulo r y su argumento θ

$$r = |z|, \quad \theta = \arg z.$$

La representación en forma polar del número complejo es

$$z = (r)_\theta .$$

Ejemplo 1.6 *Forma polar. Determina la forma polar de los siguientes números complejos*

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -0.234 + 1.231i.$$

Expresa el argumento en radianes.

- Para $z_1 = 1 + i$, obtenemos

  $$r_1 = \sqrt{2}, \quad \theta_1 = \arctan 1 = \pi/4 \,\mathrm{rad},$$

  por lo tanto

  $$z_1 = \left(\sqrt{2}\right)_{\pi/4 \text{ rad}} .$$

- Para $z_2 = i$ es

  $$r_2 = 1, \quad \theta_2 = \pi/2 \,\mathrm{rad},$$

  por lo tanto

  $$z_2 = (1)_{\pi/2 \text{ rad}} .$$

- Finalmente, para $z_3 = -0.234 + 1.231i$ obtenemos

  $$r_3 = 1.2530, \quad \theta_1 = \arctan \frac{1.231}{-0.234} + \pi = 1.7586 \,\mathrm{rad},$$

  por lo tanto

  $$z_1 = (1.2530)_{1.7586 \text{ rad}} . \quad \square$$

Actividad 1.6 *Determina la forma polar de los complejos del ejemplo anterior, expresando el argumento en grados.*
Sol. $z_1 = \left(\sqrt{2}\right)_{45^o}$; $z_2 = (1)_{90^o}$; $z_3 = (1.2530)_{100.76^o}$.

Actividad 1.7 *Determina la forma binómica de los siguiente complejos*

$$z_1 = (1)_{23^o}, \quad z_2 = (2)_{1.23\,rad}, \quad z_3 = (1.24)_{2.45\,rad} .$$

Sol. $z_1 = 0.9250 + 0.3907i$; $z_2 = 0.6685 + 1.8850i$; $z_2 = -0.9551 + 0.7908i$.

1.6 Forma trigonométrica

Dado un número complejo $z = (r)_\theta$, su forma trigonométrica es

$$z = r\left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right).$$

La forma trigonométrica combina la forma binómica y polar.

Actividad 1.8 *Expresa en forma trigonométrica los siguientes números complejos.*

$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -2i, \quad z_4 = 1 + i.$$

Sol. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}$, $z_3 = \cos\frac{-\pi}{2} + i\,\sin\frac{-\pi}{2}$, $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

1.7 Forma exponencial

Dado un número real θ, la *Fórmula de Euler* define $e^{i\theta}$ como

$$e^{i\theta} = \left(\cos\theta + i\,\sin\theta\right).$$

Si tenemos el número complejo en forma polar $z = (r)_\theta$, entonces su expresión en forma exponencial es

$$z = re^{i\theta}.$$

Actividad 1.9 *Expresa en forma exponencial los siguientes números complejos.*

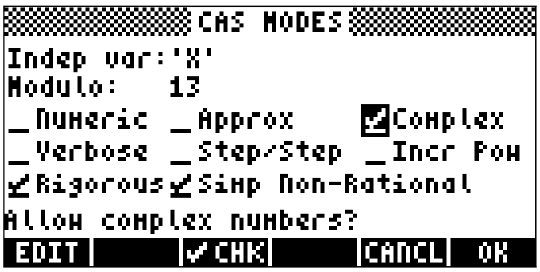
$$z_1 = -1 + i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -2i, \quad z_4 = 1 + i.$$

Sol. $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_4 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

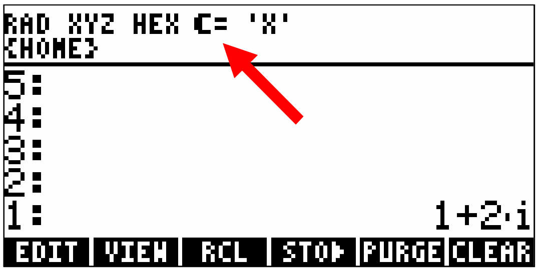
2 Modo complejo

2.1 Selección del modo complejo

La calculadora puede manejar números complejos, para ello debemos activar el modo complejo en las opciones del [CAS] en [MODE].



Cuando el modo complejo está activo, aparece el indicador $\mathbb{C}$ en la parte superior de la pantalla



Actividad 2.1 *Activa el modo complejo cambiando las opciones del CAS. Observa el indicador de modo complejo en la pantalla.*

Para cambiar entre modo real y modo complejo de forma rápida podemos usar el atajo[3] ↰[TOOL]

Actividad 2.2 *Cambia entre modo real y modo complejo usando el atajo* ↰[TOOL].

2.2 Selección del sistema de coordenadas

Uno de los aspectos complicados de los números complejos es que admiten varios tipos de representación.

- Binómica.
- Cartesiana.
- Polar.
- Trigonométrica.
- Exponencial.

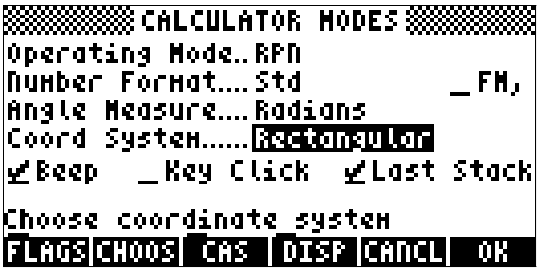
Es decir, en principio, podemos representar un mismo número complejo de, al menos, 5 formas distintas. Cada una de estas representaciones es más conveniente en ciertas situaciones. Por ejemplo, para sumar y restar, es preferible tener los números complejos en forma binómica o cartesiana; en cambio, para multiplicar y dividir, es preferible la forma polar.
Las representaciones pueden clasificarse en dos tipos, las que usan la parte real y la parte imaginaria y las que usan el módulo y el argumento.

[3]Recuerda que usamos la notación ↰[TOOL] para indicar que debes pulsar la tecla de cambio izquierdo [↰] y después la tecla [TOOL] sin soltar la tecla de cambio.

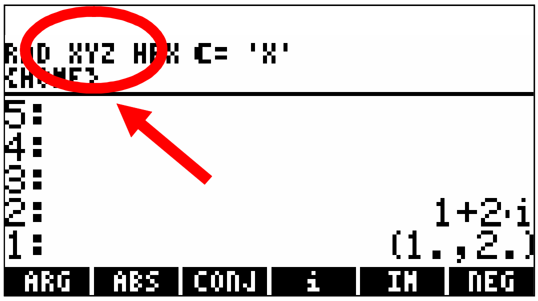
- Parte real, parte imaginaria $\begin{cases} \text{Binómica } z = a + bi. \\ \text{Cartesiana } z = (a, b)\,. \end{cases}$

- Módulo argumento $\begin{cases} \text{Polar } z = (r)_\theta\,. \\ \text{Trigonométrica } z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)\,. \\ \text{Exponencial } z = re^{i\theta}. \end{cases}$

Una de las características más destacadas de la calculadora es que nos permite operar con números complejos expresados en distintos formatos. Para obtener el resultado en la forma binómica y cartesiana, debemos configurar el *sistema de coordenadas* en *modo rectangular*

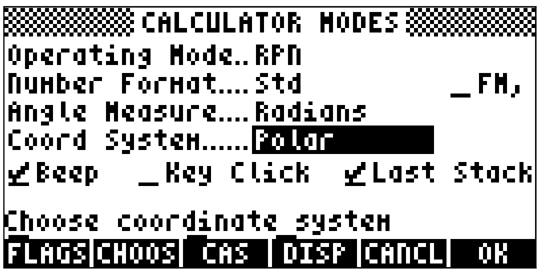


Cuando el modo de coordenadas rectangular esta activo, aparece el indicador XYZ en la parte superior de la pantalla

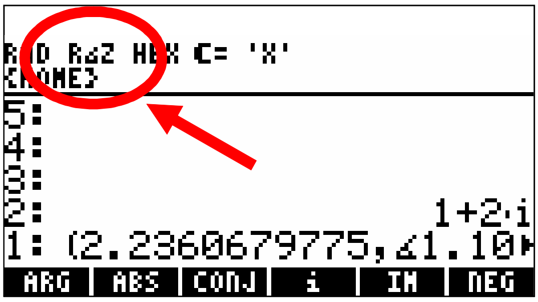


Actividad 2.3 *Activa el modo de coordenadas rectangular. Observa el indicador en la pantalla.*

Si seleccionamos el modo de coordenadas *polar*



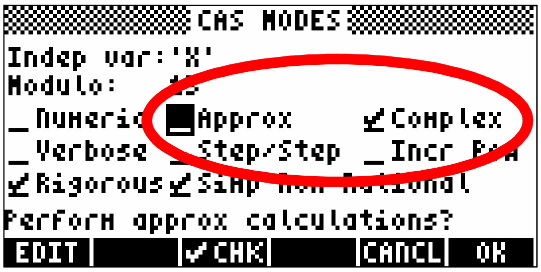
entonces el indicador de sistema de coordenadas es



Actividad 2.4 *Activa el modo de coordenadas polar. Observa el indicador en la parte superior de la pantalla.*

2.3 Modo complejo exacto ($\mathbb{C} =$)

En el *modo complejo exacto*



la calculadora produce número complejos exactos como

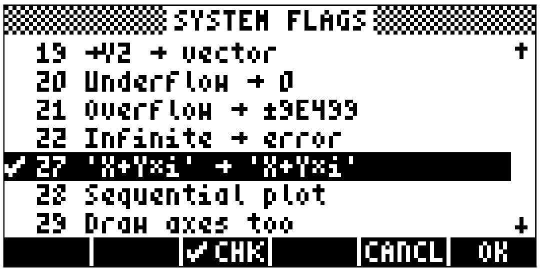
$$2+\sqrt{3}\,i, \qquad \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

Cuando la calculadora está en modo complejo exacto, aparece el indicador ($\mathbb{C}=$) en la parte superior de la pantalla.

Actividad 2.5 *Configura la calculadora en modo complejo exacto. Observa el indicador* ($\mathbb{C} =$) *en la parte superior de la pantalla.*

2.4 Entrada de complejos en forma binómica

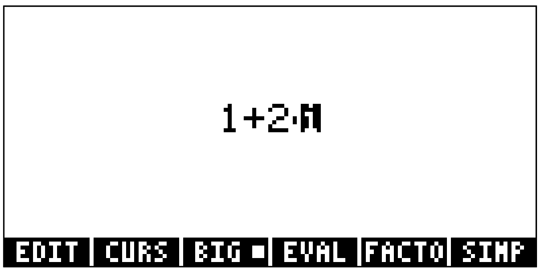
Los números complejos exactos pueden representarse en forma binómica o cartesiana. El *flag* 27 determina[4] si los números en forma binómica se presentan en pantalla en forma cartesiana (a, b).



Para entrar un complejo en forma binómica escribimos la expresión algebraica $a + bi$, para escribir la unidad imaginaria i usamos la tecla[5] ↰(2,3).

Podemos entrar un número complejo en forma binómica de varias maneras. Así, para entrar el complejo $1 + 2i$, podemos:

- Activar el editor de ecuaciones, entrar el complejo $1 + 2i$

  y pulsar ENTER.

- Pulsar la tecla de apóstrofo para activar el modo algebraico y escribir directamente el complejo en la línea de edición en forma algebraica

[4] Para acceder al menú de configuración de *flags* pulsa [MODE][FLAGS].

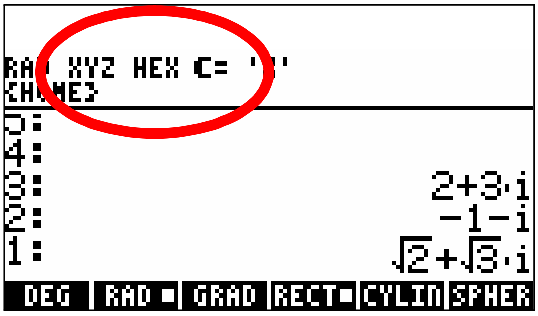
[5] Recuerda que la notación ↰(2,3) indica la tecla de la fila 2, columna 3 con cambio izquierdo.

- Construir el complejo operando desde la pila. Cargar el pila 1, 2, i y pulsar [×], [+].

La presentación del complejo en la pila puede ser en forma binómica o cartesiana según la configuración del flag 27.

Actividad 2.6 *Fija el modo complejo exacto, el modo de coordenadas rectangular y activa el flag 27.*

1. *Observa los indicadores de la parte superior de la pantalla para verificar que la calculadora está bien configurada.*

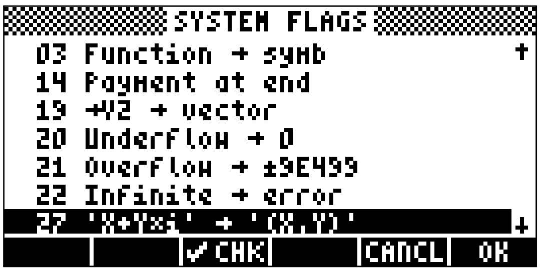


2. *Accede al editor de ecuaciones y escribe el complejo* $2+3i$*. Observa que se carga en la pila en forma binómica.*

3. *Escribe el complejo* $-1-i$ *desde la línea de edición usando apóstrofes.*

4. *Escribe el número* $\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$ *operando desde la pila.*

5. *Desactiva el* flag *27.*

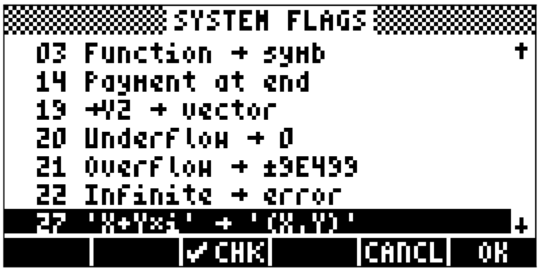


6. *Ahora los complejos de la pila debieran aparecen en forma rectangular.*

7. *Observa que el número $-1-i$, continua en forma binómica.*

Parece ser que el *flag* 27 tiene un problema de funcionamiento cuando la calculadora está en modo exacto y la parte imaginaria es negativa. Para confirmarlo, realiza la siguiente actividad.

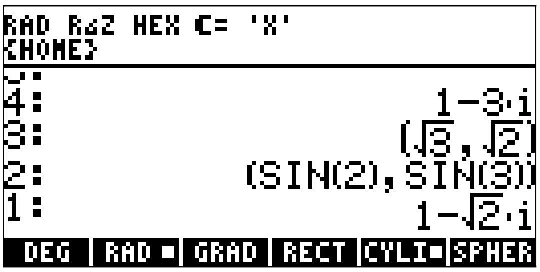
Actividad 2.7 *Fija el modo complejo exacto; desactiva el flag 27.*



Carga en la pila los complejos

$$1-3i, \quad \sqrt{3}+\sqrt{2}\,i, \quad \sin 2 + i \sin 3, 1-\sqrt{2}\,i$$

Observa que los complejos con parte imaginaria negativa continúan en forma binómica

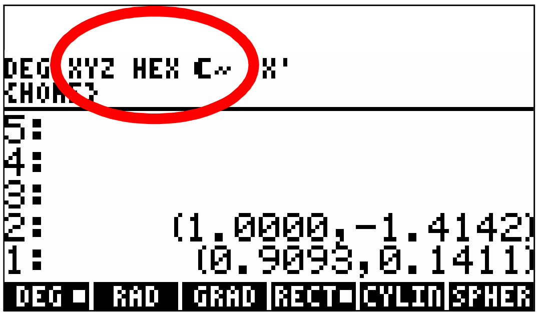


El problema desaparece cuando realizamos una evaluación decimal pulsando →[NUM].

2.5 Modo complejo aproximado ($\mathbb{C} \sim$)

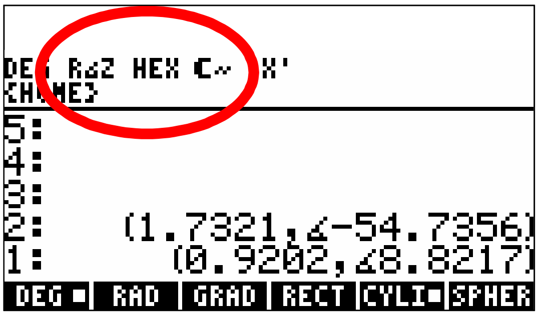
En el *modo complejo aproximado*, la calculadora produce aproximaciones decimales de la parte real y la parte imaginaria. Cuando la calculadora está en modo complejo aproximado, aparece el indicador ($\mathbb{C}^\sim$) en la parte superior de la pantalla.

- Si el modo de coordenadas rectangular está activado, la calculadora presenta los complejos aproximados en forma cartesiana.

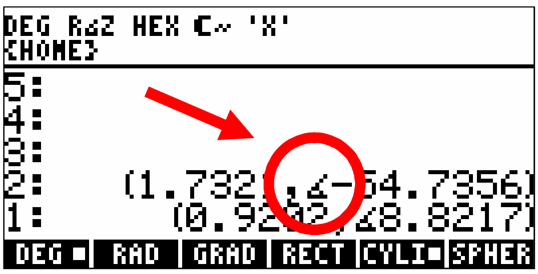


  En este caso, la primera coordenada es la parte real y la segunda la parte imaginaria.

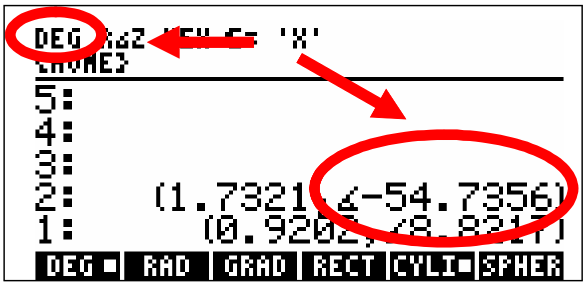
- Si el modo polar está activado, la calculadora presenta los complejos en forma polar. En este caso la segunda coordenada es el argumento.



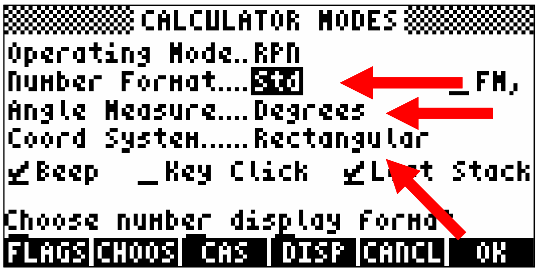
  Observa que la calculadora usa un carácter especial para indicar cuando la segunda coordenada es un argumento



- Debes tener en cuenta que el valor del argumento se ve afectado por el modo angular. El indicador DEG, nos informa de que el argumento está expresado en grados sexagesimales.



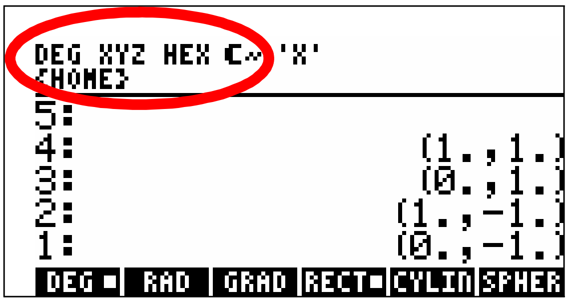
Actividad 2.8 *Fija el modo complejo aproximado, el sistema de coordenadas rectangular, el modo angular en grados sexagesimales. y el formato numérico estándar.*



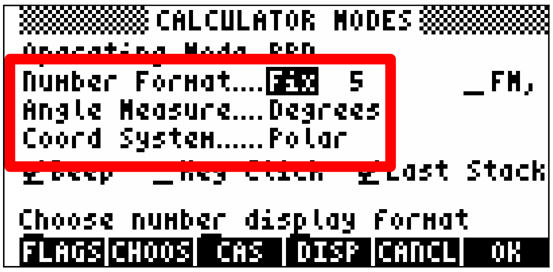
1. *Observa los indicadores de la parte superior de la pantalla para verificar que la calculadora está bien configurada.*
2. *Entra los complejos*

$$1+i, \quad i, \quad 1-i, \quad -i,$$

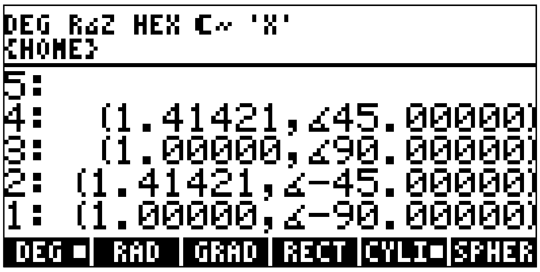
obtendrás:



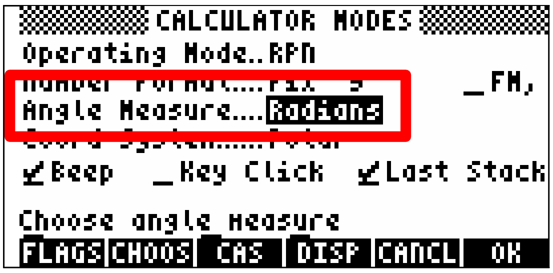
3. *Cambia el sistema de coordenadas a polar y el formato numérico a FIX 5,*



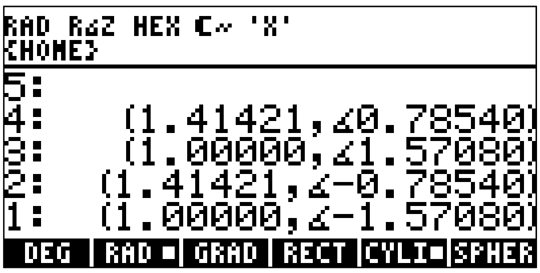
obtendrás:



4. Cambia el modo angular a radianes,



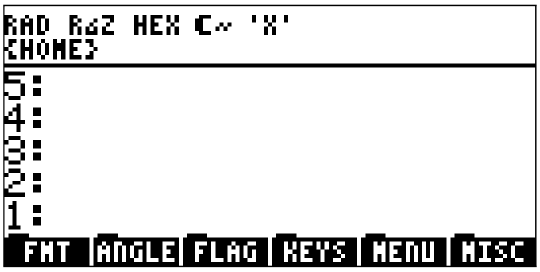
entonces resulta:



Observa que ahora los argumento están expresado en radianes.

3 Cambio rápido de configuración de Modos de operación

Existe un sistema de soft-menús que permite configurar los modos de operación de la calculadora de forma muy eficiente. Es un recurso de la antigua calculador HP48g, que es accesible mediante la combinación de teclas[6] ↰[MODE].



3.1 Formato numérico

Pulsando [F1], accedemos al submenu [FMT] que nos permite configurar de forma rápida el formato numérico.

- [STD] fija formato numérico estándar.
- Para establecer el modo FIX 5, cargamos 5 en la pila y pulsamos [FIX]. Los formatos [SCI] y [ENG] actúan de forma similar.

Pulsando la tecla[7] [NEXT], aparece una opción para acceder al menú principal de configuración de modos

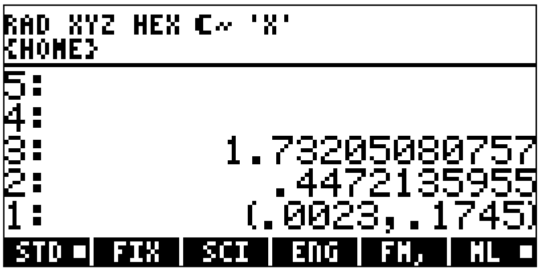
[6] Esta combinación de teclas no funciona en versiones antiguas de la ROM de la HP49g.
[7] Tecla (3,3).

Actividad 3.1 *Carga en la pila los números*

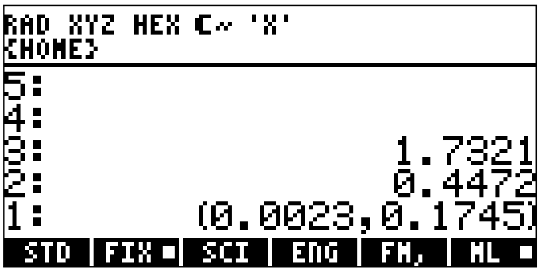
$$\sqrt{3}, \quad 1/\sqrt{5}, \quad 0.0023 + 0.1745i.$$

Evalúalos en forma decimal, pulsando →[NUM] *si es necesario.*

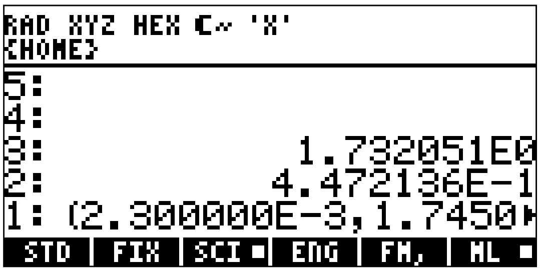
1. *Visualiza los números en formato estándar.*



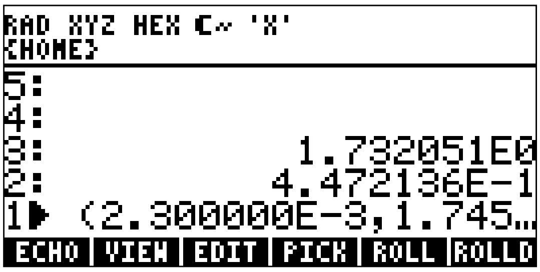
2. *Visualiza los números en formato* FIX 4; *para ello entra* 4 *en la pila y pulsa* [FIX].



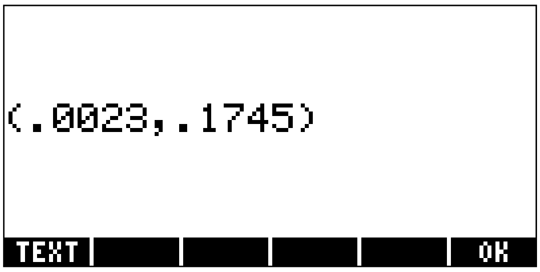
3. *Visualiza los números en formato* SCI 6.



4. *Observa que el complejo del nivel 1 de la pila no puede verse bien. Una forma de visualizar del número consiste en pulsar la tecla de desplazamiento* [▲] *para acceder el editor de pila*



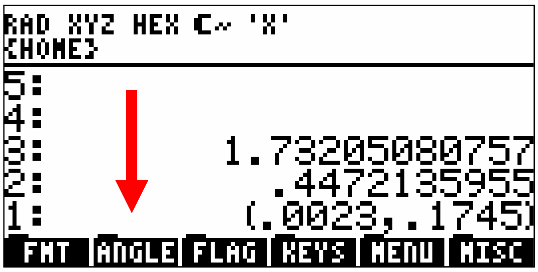
y pulsar [VIEW].



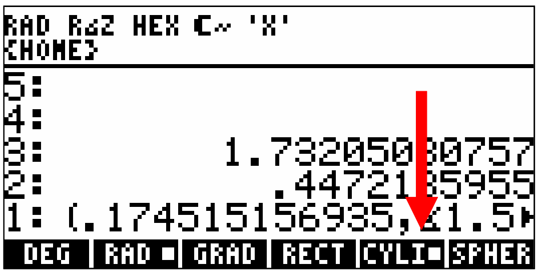
También puedes usar [TOOL][VIEW].

3.2 Selección de modo angular y sistema de coordenadas

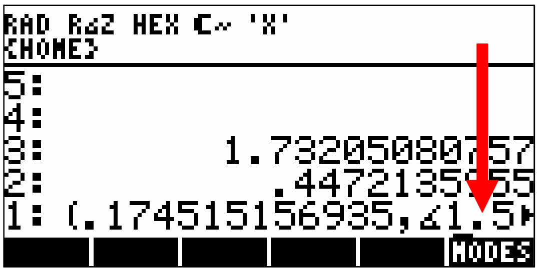
El submenu [ANGLE]



permite configurar el modo angular y el sistema de coordenadas. La opción [CYLIN] activa el sistema de coordenadas polares.



También en este caso, pulsando la tecla [NEXT] aparece una opción para volver al menú principal de configuración de modos.

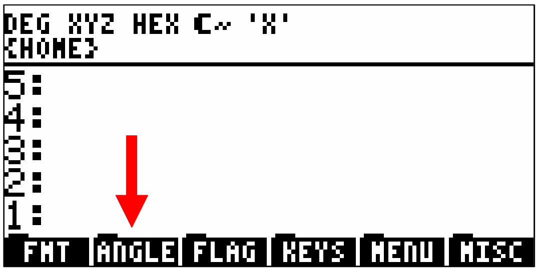


Actividad 3.2 *Queremos determinar, con cuatro decimales, las coordenadas polares de los números complejos*

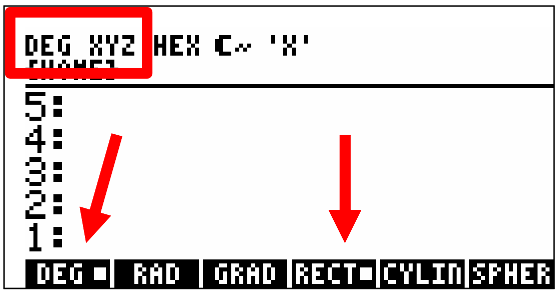
$$1 + \sqrt{2}i, \quad -1 - \sqrt{3}i, \quad \cos 20^o - i \sin 30^o,$$

expresando el argumento en grados sexagesimales. y en radianes.

1. *Accede al menú rápido de* MODES *con* $\boxed{\text{↰[MODE]}}$. *Entra en el submenú* [ANGLE].

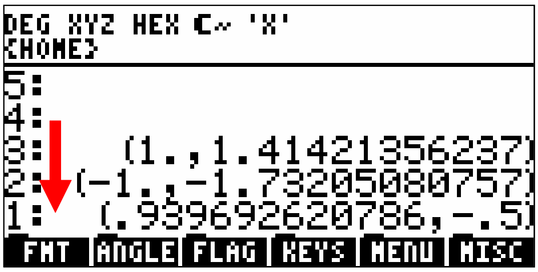


2. *Fija el modo angular en grados y el sistema de coordenadas rectangular*

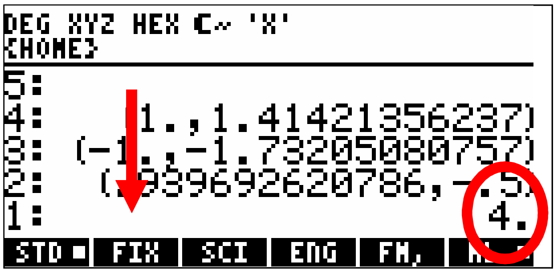


3. *Entra los complejos y evalúalos numéricamente si es preciso. Pulsa* [NEXT] *para acceder a la segunda página del menú y pulsa* [MODES] *para volver al menú principal.*

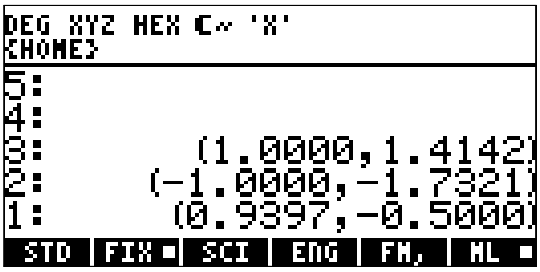
4. *Entra en* [FMT] *para configurar el formato numérico.*



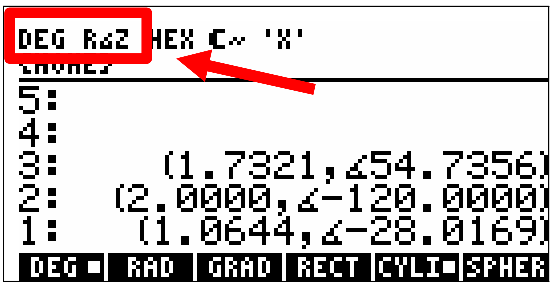
5. *Carga 4 en la pila y pulsa* [FIX],



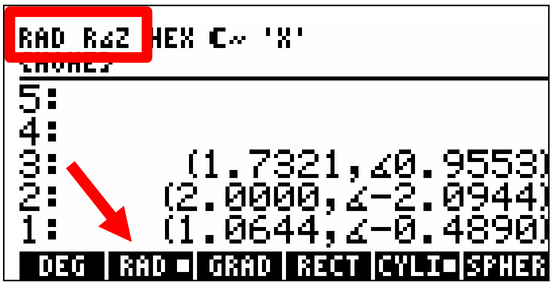
obtendrás los resultados presentados con 4 decimales.



6. *Pulsa* [NEX] *y* [MODES] *para volver al menú principal, entra en* [ANGLE] *y selecciona el modo de coordenadas polar pulsando* [CYLIN], *obtendrás las coordenadas polares con el argumento expresado en grados.*



7. *Cambia el modo angular a radianes y obtendrás las coordenadas polares con el argumento expresado en radianes.*



4 Entrada de complejos en diferentes formatos

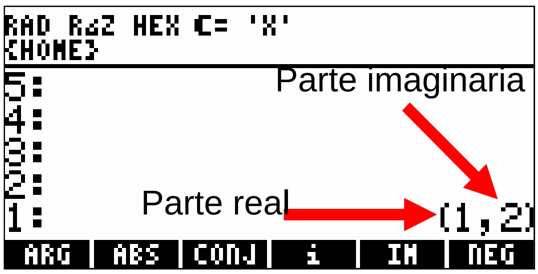
4.1 Forma binómica

La representación binómica es de la forma

$$z = a + bi.$$

Se trata de una expresión algebraica. Hemos visto que podemos entrar el complejo desde la pila o desde el editor de ecuaciones. Usamos la unidad imaginaria[8] i para construir el complejo

Hemos visto en la Sección 2.4, que según la configuración del *flag 27* el complejo puede aparecer en la pila en forma cartesiana.



4.2 Forma cartesiana

La representación cartesiana es de la forma

$$z = (a, b)\,, \quad a = \text{parte real}, \quad b = \text{parte imaginaria}.$$

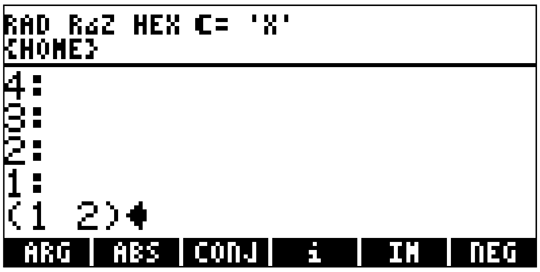
[8] Tecla ↰(2,3).

Podemos entrar el complejo en forma cartesiana directamente usando paréntesis.

4.2.1 Entrada desde la línea de edición

Entrar el complejo $z = (a, b)$ desde la línea de edición es muy simple:

1. Pulsamos ↰[−] para escribir los paréntesis.
2. Entramos a y b separados por una coma[9] o un espacio[10]



   y pulsamos [ENTER] para cargar el número en la pila.

Debemos tener presente que:

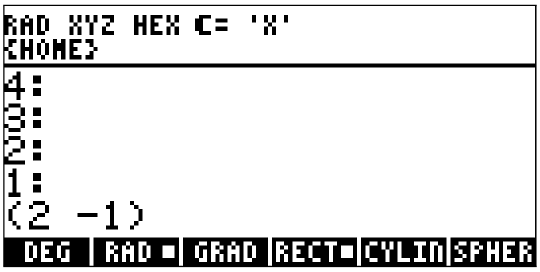
- Cuando entramos un complejo en forma cartesiana desde la línea de edición, el complejo queda en forma aproximada, independientemente de que la calculadora esté en modo exacto o aproximado.
- El complejo aparecerá en la pila en modo cartesiano o polar según el modo de representación activo.
- En este sistema de entrada, a y b deben ser números.

Actividad 4.1 *Fija el modo complejo exacto, el sistema de coordenadas rectangular y el formato numérico estándar. Entra el complejo* $z = (2, -1)$ *desde la línea de edición. Usa* [+/−] *para cambiar el signo de la parte imaginaria en la línea de edición.*

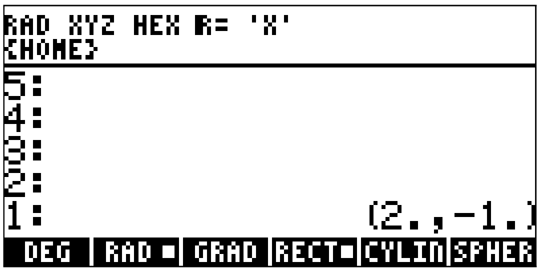
---

[9] Tecla ↱[SPC], esto es ↱(10,4).

[10] Si usamos [SPC] para separar a y b, el sistema escribe automáticamente la coma y nos ahoramos una pulsación.



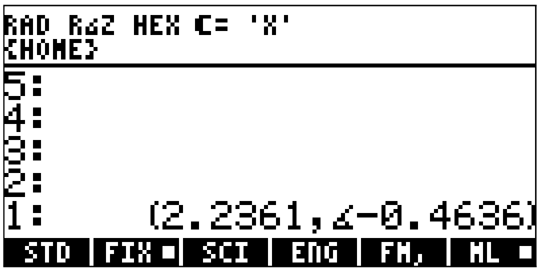
Pulsa [ENTER] *para cargar el número en la pila. Debes obtener la pantalla*



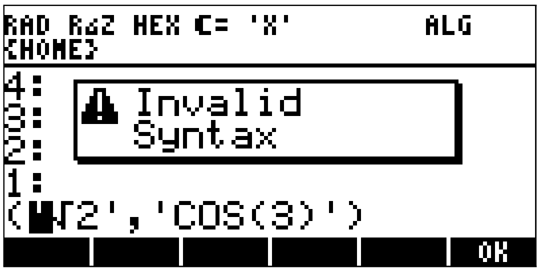
Actividad 4.2 *Establece la siguiente configuración:*

1. *El modo complejo exacto.*
2. *El sistema de coordenadas polar.*
3. *El modo angular en radianes.*
4. *El formato numérico en* FIX 4.

Entra el complejo $z = (2, -1)$ *desde la línea de edición. Cuando pulses* [ENTER]*, debes obtener la pantalla*



Actividad 4.3 *Intenta entrar el complejo* $z = (\sqrt{2}, \cos 3)$ *desde la línea de edición. Aunque intentes usar sintaxis algebraica obtendrás un error.*

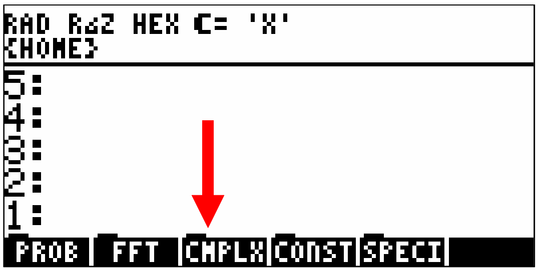


4.2.2 Entrada con el comando [R→C]

El comando [R→C] construye el complejo (a, b) a partir de los valores a y b cargados en la pila. Es un comando de la antigua serie HP48 y sólo funciona con números aproximados. Podemos acceder al comando [R→C] a través del submenu [CMPLX] del menu[11] [MTH]. Para acceder al comando [R→C] procedemos como sigue:

1. Pulsamos la tecla ↰(4,4) para activar el menu [MTH]

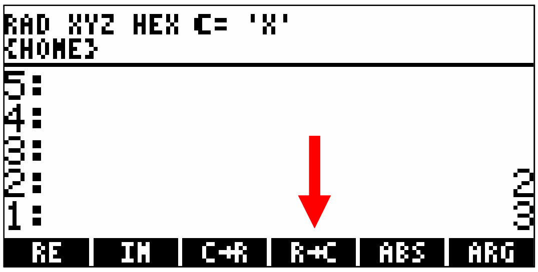
2. Pulsamos [NEXT] para acceder a la segunda página y [F3] para entrar en el submenu [CMPLX].



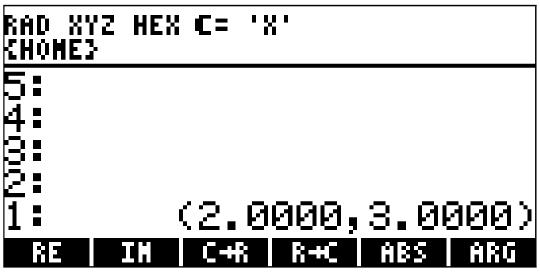
Obtenemos el siguiente menú

[11] El menu [MTH] es el menú de aplicaciones matemáticas de la antigua serie HP48.

Actividad 4.4 *Selecciona el modo de coordenadas rectangular y el formato numérico* FIX 4. *Carga en la pila los valores* 2 *y* 3 *y ejecuta el comando* R→C.

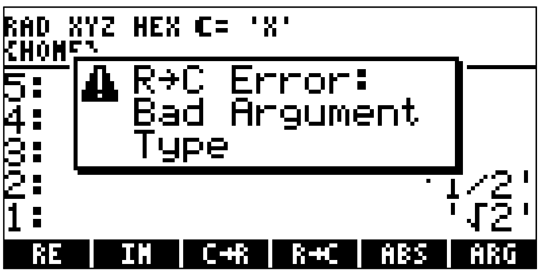


Obtendrás el complejo $(2,3)$ *en la pila.*

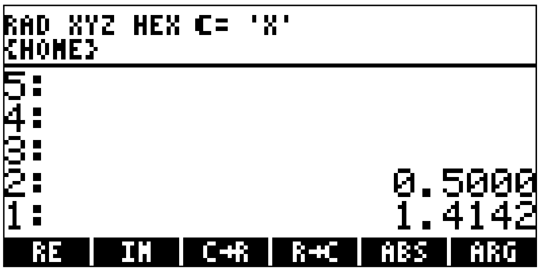


Actividad 4.5 *El comando* R→C no acepta expresiones algebraicas *y siempre produce un complejo aproximado. Para verificar esta afirmación, realiza los siguientes pasos.*

1. *Fija el modo exacto en la calculadora.*
2. *Carga en la pila los números* $1/2, \sqrt{2}$.
3. *Ejecuta el comando* R→C, *obtendrás el siguiente mensaje de error*



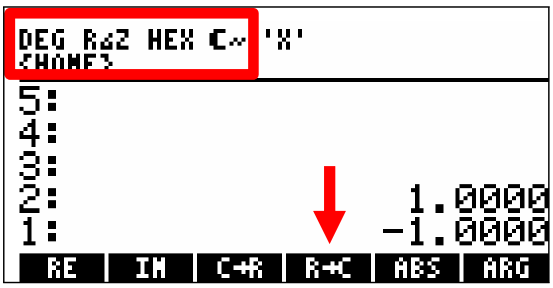
4. *Usa* → NUM *y* SWAP *para obtener una evaluación aproximada de los números de la pila.*



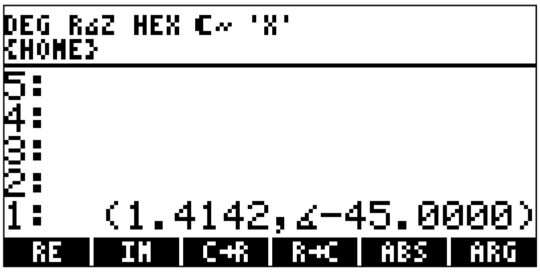
y vuelve a ejecutar R→C, *ahora debes obtener:*

Actividad 4.6 *El comando* R→C *presenta el resultado en forma cartesiana o polar según el modo de coordenadas activo.*

1. *Selecciona el modo de coordenadas polar.*
2. *Selecciona el modo complejo aproximado.*
3. *Fija el formato numérico* FIX 4.
4. *Fija el modo angular en grados sexagesimales.*
5. *Carga en la pila los valores* $1, -1$.

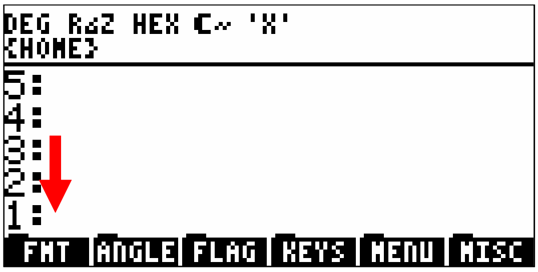


6. *Ejecuta* R→C, *obtendrás la forma polar del complejo* $1 - i$.



Actividad 4.7 *Al usar la calculadora, frecuentemente hemos de trabajar con dos menús. Para cambiar de forma rápida entre dos menús podemos usar el atajo* ↰[NEXT]. *Al pulsar* ↰[NEXT], *accedemos de forma directa al último menú visitado.*

1. *Accedemos al menú rápido de configuración de modos con* ↰[MODE]

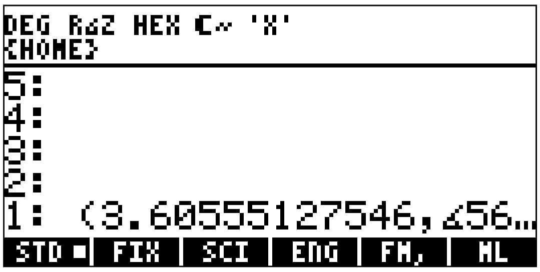


y fijamos el formato numérico estándar.

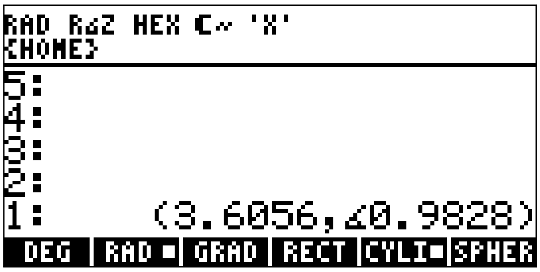
2. *Accedemos al menu* [MTH][CMPLX] *para entrar el complejo* $2+3i$.

3. *Ejecutamos* R→C, *y resulta*

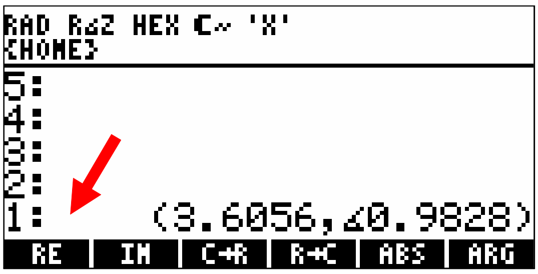
4. *Pulsamos* $\boxed{\text{↰[NEXT]}}$ *y volvemos al último menú visitado, en nuestro caso, el menú de configuración rápida de modos.*



5. *Fijamos el formato numérico* FIX 4 *y el modo angular en radianes.*



6. *Supongamos que ahora quisiéramos determinar la parte real del complejo que aparece en el nivel* 1 *de la pila. Pulsamos* $\boxed{\text{↰[NEXT]}}$ *y volvemos al último menú visitado, en nuestro caso,* [MTH][CMPLX], *y ejecutamos el comando* [RE],

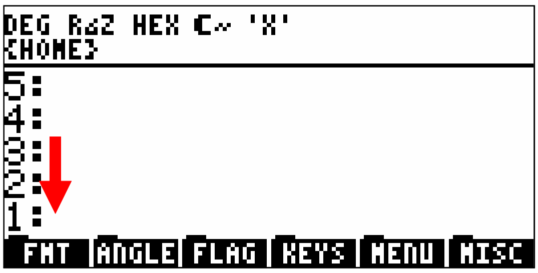


obtenemos

Actividad 4.8 *Verifica manualmente que la parte real del número complejo* $z = (3.6065)_{0.9828\,rad}$ *es* 2.0000.

Actividad 4.9 *Al usar la calculadora, a menudo obtenemos resultados que no pueden mostrarse completamente en la pila. En esta actividad se muestra la forma de visualizar completamente un complejo usando el comando* [VIEW] *del* editor de pila.

1. *Accedemos al menú rápido de configuración de modos con* $\boxed{\text{↰[MODE]}}$

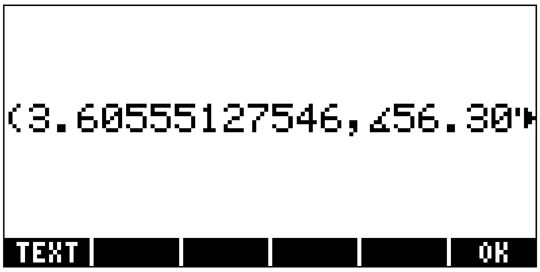


Fijamos el formato numérico estándar.

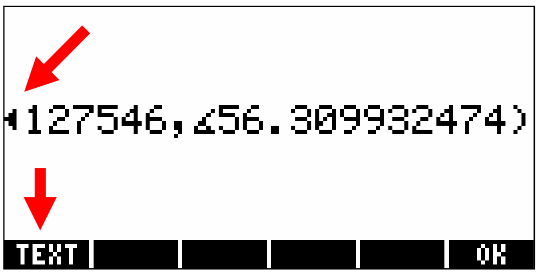
2. *Accedemos al menu* [MTH][CMPLX] *para entrar el complejo* $2{+}3i$.

3. *Ejecutamos* R→C, *y resulta*

4. *Para ver el resultado completo, accedemos al editor de pila con*[12] [HIST] *y pulsamos* [VIEW], *obtenemos*



pulsando la tecla [▶], *podemos desplazar la pantalla gráfica. La punta de flecha en el lateral de la pantalla indica que parte del objeto está oculto.*



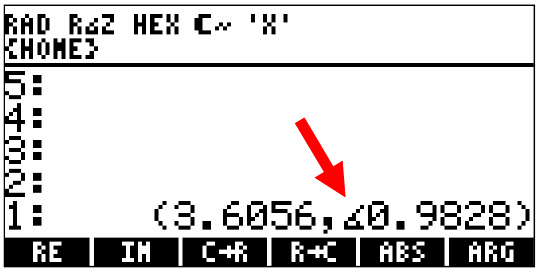
[12] También podemos usar la tecla [▲] para acceder al editor de pila.

> *También podemos pulsar* [TEXT], *para cambiar el formato de visualización.*

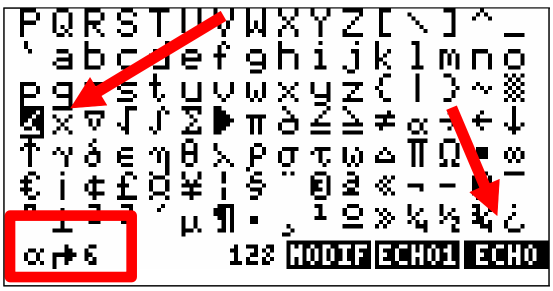
> *Pulsamos* [CANCEL] *dos veces para volver a la pila.*

4.3 Entrada de complejos en forma polar

Cuando la calculadora presenta complejos en forma polar, se emplea un carácter especial para indicar que el segundo valor del par es el argumento.



Para entrar complejos en forma polar, usamos este carácter, que podemos obtener en el menu[13] [CHARS].



Una vez localizado el carácter, lo resaltamos con el cursor. Si pulsamos [F6] para ejecutar [ECHO], el carácter se copia en la línea de edición. La aplicación [CHARS] también nos muestra el acceso directo al carácter cuando existe, en nuestro caso, podemos obtener directamente el carácter pulsando [ALPHA]↱[6].

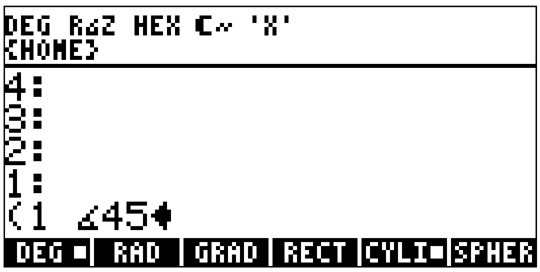
[13]Tecla ↱(4,2).

Actividad 4.10 *Accede a* [CHARS] *y busca el carácter que marca los argumentos. Cárgalo en la línea de edición con* [ECHO]*.*

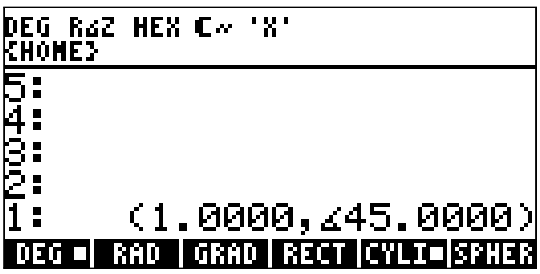
Actividad 4.11 *Pulsa* [ALPHA]↱[6] *para cargar directamente el carácter indicador de argumentos en la pila.*

Actividad 4.12 *Queremos entrar el complejo* $(1)_{45^o}$

1. *Accede al menú rápido de configuración de modos.*
2. *Fija el modo angular en grados.*
3. *Fija el sistema de coordenadas en polar. Recuerda que la opción que activa el modo polar en el menú rápido de configuración de modos es* [CYLIN]*.*
4. *Pulsa* ↰[−] *para escribir un par de paréntesis, escribe el módulo y pulsa* [SPC] *(o coma).*
5. *Accede a* [CHARS] *y copia el carácter especial para indicar el argumento; escribe el argumento.*



6. *Pulsa* [ENTER] *para cargar el complejo en la pila.*



Actividad 4.13 *Queremos expresar en forma cartesiana los complejos*

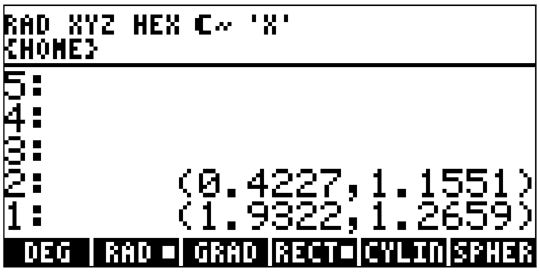
$$z_1 = (1.23)_{1.22\,rad}, \quad z_2 = (2.31)_{0.58\,rad}.$$

Para ello:

1. *Fija el* sistema de coordenadas rectangular,

2. *Entra los complejos en forma polar, usando el carácter especial para argumentos.*

Observa que la calculadora convierte automáticamente los complejos a forma cartesiana, el resultado es

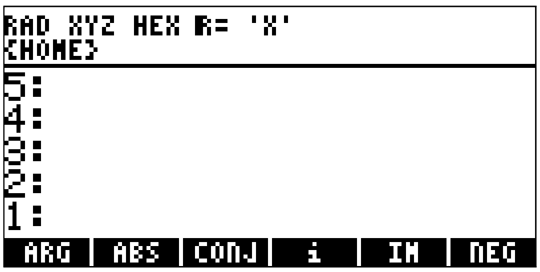


Actividad 4.14 *Calcula manualmente la forma cartesiana de los complejos* $(1.23)_{1.22\,rad}$, $(2.31)_{0.58\,rad}$.

5 El menu [CMPLX]

El menú CMPLX, agrupa algunos recursos útiles para el cálculo con complejos. Accedemos al menu [CMPLX] pulsando la tecla numérica 1 con cambio derecho (↱[1]).

La primera página del menú



contiene las siguientes opciones:

- [ARG] Calcula el argumento.
- [ABS] Calcula el módulo.

- [i] Escribe la unidad imaginaria.
- [CONJ] Calcula el conjugado. Recordemos que el conjugado del número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.
- [IM] Calcula la parte imaginaria.
- [NEG] Cambia de signo el complejo. Produce el mismo efecto que la tecla de cambio de signo[14] [+/−].

Si pulsamos[15] [NEXT] accedemos a la segunda página del menú

que contiene dos nuevas opciones

- [RE] Calcula la parte real.
- [SIGN] Calcula el complejo $\frac{z}{|z|}$. Se trata de un complejo de módulo 1 que tiene el mismo argumento que z.

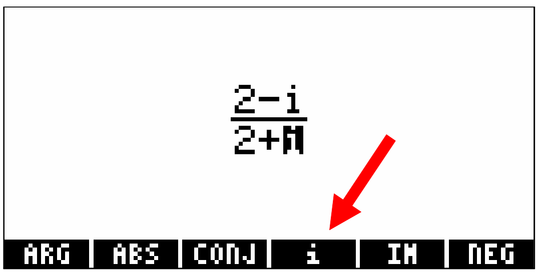
Actividad 5.1 *Accede al menú* [CMPLX] *y observa las opciones contenidas en las dos páginas de menú.*

Actividad 5.2 *El objetivo es calcular*

$$\frac{2-i}{2+i}$$

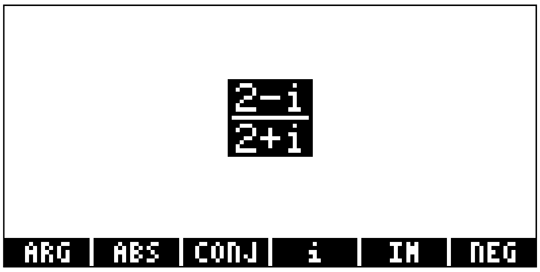
en el editor de ecuaciones. Procede como sigue:

1. *Entra en el editor de ecuaciones y accede a* [CMPLX]*. Usa* [i] *para escribir la expresión*

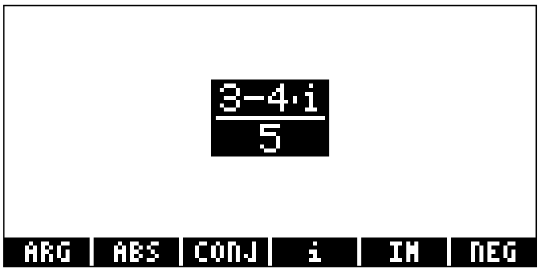


[14] Tecla (6,2).
[15] Tecla (3,3).

2. *Selecciona toda la fracción*



y pulsa[16] [EVAL]



Pulsa [ENTER] *para cargar el resultado en la pila*

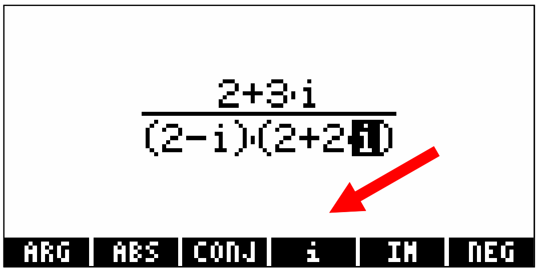
Actividad 5.3 *El objetivo es calcular*

$$\frac{2+3i}{(2-i)\,(2+2i)}$$

determinando los resultados intermedios. Procede como sigue:

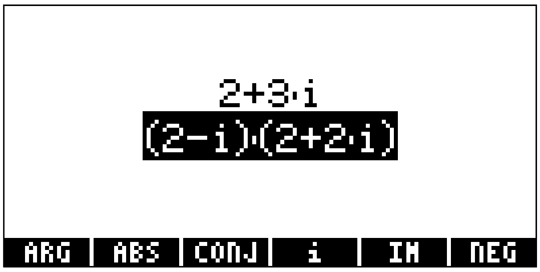
1. *Entra en el editor de ecuaciones y accede a* [CMPLX]. *Usa* [i] *para escribir la expresión*

[16] Tecla (4,2) en la Hp49g+/48gII. En la Hp49g es la tecla ↱(4,4). También pudes pulsar [TOOL] para activar el soft-menú de herramientas del editor de ecuaciones y ejecutar EVAL pulsando[F4].

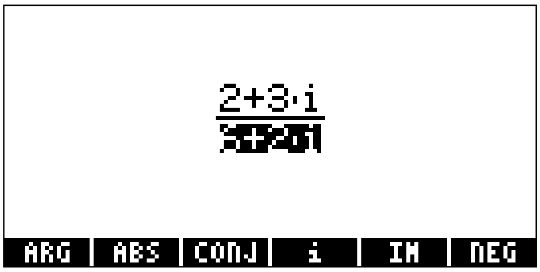


pon atención en el uso correcto de los paréntesis.

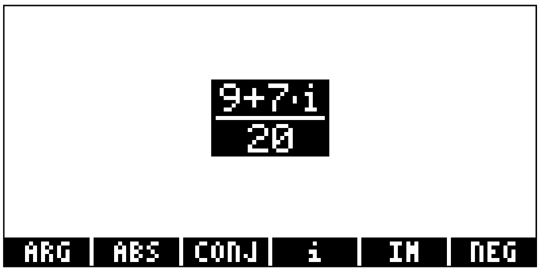
2. *Selecciona el denominador*



y pulsa la tecla [EVAL] *para evaluar el denominador.*



3. *Selecciona toda la fracción y pulsa nuevamente* [EVAL] *para calcular el resultado final*



4. *Pulsa* [ENTER] *para cargar el resultado en la pila*

Actividad 5.4 *Calcula el valor de*

$$z_1 = \frac{(1+3i)\,(1+2i)}{(1-i)\,(1+4i)}$$

determinando resultados intermedios para el numerador y denominador. Determina el módulo y el argumento (en radianes).
Sol. $z_1 = \frac{-5+5i}{5+3i} = -\frac{5}{17} + \frac{20}{17}i$. $|z_1| = 1.2127, \arg(z_1) = 1.8158$ *rad.*

6 Operaciones con complejos

6.1 Operaciones en forma binómica

Dados los complejos

$$z_1 = a + bi, \quad z_2 = c + di,$$

tenemos las siguientes operaciones aritméticas:

- Suma

$$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.$$

- Producto

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)\,(c+di) = (ac-bd) + i\,(ad+bc)\,.$$

- Inverso

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a+bi} = \left(\frac{1}{a+bi}\right)\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right) = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

El inverso puede calcularse usando el conjugado

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_1}\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2},$$

donde hemos usado la siguiente propiedad del conjugado

$$z_1 \cdot \bar{z}_1 = (a+bi)\,(a-bi) = a^2 + b^2 = |z_1|^2\,.$$

- Cociente

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i.$$

El cociente puede calcularse el conjugado

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Ejemplo 6.1 *Dados $z = 3+i$, $w = 2-3i$ calcula $z+w, z^{-1}, z\,w$ y z/w.*

$$z + w = (3+i) + (2-3i) = 5 - 2i,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(3+i)} = \frac{(3-i)}{(3+i)\,(3-i)} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i,$$

$$z\,w = (3+i)\,(2-3i) = 9 - 7i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3+i}{2-3i} = \frac{(3+i)\,(2+3i)}{(2-3i)\,(2+3i)} = \frac{3+11i}{13}. \quad \square$$

Actividad 6.1 *Realiza manualmente los cálculos del ejemplo anterior.*

Actividad 6.2 *Realiza los cálculos del ejemplo anterior con la calculadora.*

Actividad 6.3 *Dados los números complejos*

$$z = 2+i, \quad u = 3-i, \quad w = 3+3i,$$

calcula:

$$z_1 = \frac{z^2(u+w)}{(u-w)^3}, \qquad z_2 = \frac{(i+u+w)\,(z-u-w)}{(z-u)\,(z+w)}.$$

Sol. $z_1 = \frac{15}{32} - \frac{5}{32}i$, $z_2 = \frac{33}{41} + \frac{72}{41}i$.

Nota La suma y producto de números complejos tienen las mismas propiedades algebraicas que la suma y producto de números reales.

6.2 Producto en forma polar

La forma polar es especialmente adecuada para calcular productos y cocientes. Dados los complejos en forma polar

$$z_1 = (r_1)_{\theta_1}, \qquad z_2 = (r_2)_{\theta_2},$$

se cumple:

- $z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2)_{\theta_1+\theta_2}$

- $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)_{\theta_1 - \theta_2}$
- Si $z = (r)_\theta$ y $n \in \mathbb{Z}$, entonces $z^n = (r^n)_{n\theta}$

Ejemplo 6.2 *Dados $z = 1 + i$, $w = -2 - 2i$, calcula z^3, $z \cdot w$ y z/w usando la forma polar.*

Expresamos los complejos en forma polar

$$z = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}\text{rad}} \qquad w = \left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{5}{4}\pi\text{rad}},$$

por lo tanto

$$z^3 = \left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}\text{rad}} = (2.828427)_{2.356194\,\text{rad}} = -2 + 2i,$$

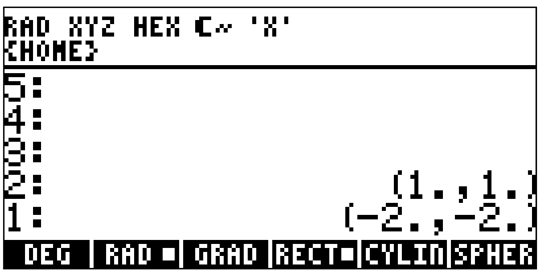
$$z \cdot w = (4)_{\frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi} = (4)_{\frac{3}{2}\pi\ \text{rad}} = -4i,$$

$$\frac{z}{w} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)_{\frac{\pi}{4} - \frac{5}{4}\pi\,\text{rad}} = \left(\frac{1}{2}\right)_{-\pi\ \text{rad}} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

Actividad 6.4 *Realiza manualmente los cálculos del ejemplo anterior.*

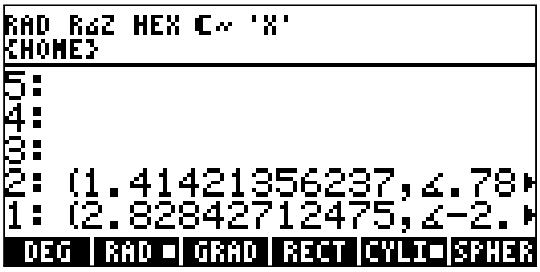
Actividad 6.5 *El objetivo de la actividad es resolver el ejemplo anterior con la calculadora.*

1. *Fija la calculadora en modo complejo aproximado*[17] *y el modo angular en radianes.*
2. *Entra los complejos en forma cartesiana.*

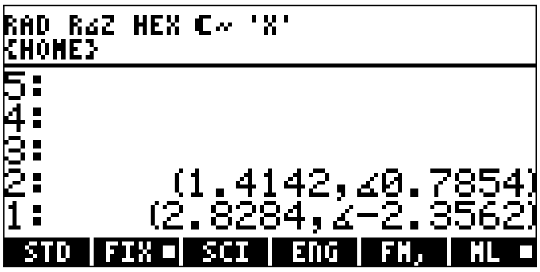


3. *Fija el modo polar, observa que los complejos z y w quedan expresados automáticamente en forma polar.*

[17] El uso de la representación polar en modo exacto puede producir resultados poco claros para el argumento.



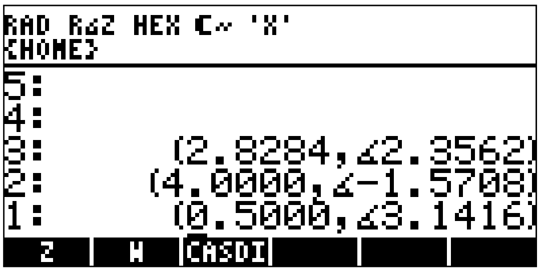
4. *Fija el modo numérico en* FIX 4, *para mejorar la visualización*



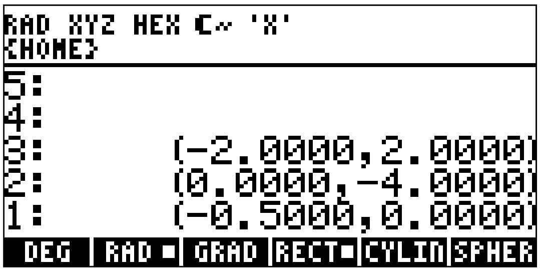
5. *Guarda los complejos en variables de nombre* Z *y* W. *Pulsa* [VAR] *para acceder fácilmente a las variables*

6. *Pulsa* [F1] *para cargar* Z, *cargamos* 3 *en el nivel* 1 *de la pila y pulsa* [Y^x] *para calcular* z^3.

7. *Realiza el resto de los cálculos. Una vez completados todos los cálculos, tendrás*



8. *Para obtener la representación cartesiana, activa el modo de representación rectangular*



Actividad 6.6 *Realiza el ejercicio anterior directamente, es decir, sin pasar a forma polar.*

6.3 Forma trigonométrica y exponencial

Dado el complejo en forma polar $z = (r)_\theta$, recordemos que su *forma trigonométrica* es

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right).$$

Para θ real, se define[18]

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

entonces el complejo $z = (r)_\theta$, expresado en *forma exponencial,* es

$$z = re^{i\theta}$$

La exponencial $e^{i\theta}$ cumple las propiedades usuales de las exponenciales

1. $\left(e^{i\theta}\right)^k = e^{ik\theta}$.
2. $e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
3. $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

[18]En rigor, la forma exponencial sólo está definida cuando el argumento θ está en radianes.

Ejemplo 6.3 *Expresa en forma trigonométrica y exponencial los complejos $z = 2i$, $w = 1 + i$, $z \cdot w$*

- Para $z = 2i$, obtenemos la forma polar $z = (2)_{\frac{\pi}{2}}$, por lo tanto

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

- Para $w = 1 + i$, obtenemos la forma polar $w = \left(\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi}{4}}$, por lo tanto

$$w = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

- Para calcular $z \cdot w$, usamos la forma exponencial

$$z \cdot w = \left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

- Si es necesario, usamos la forma trigonométrica para obtener la forma binómica de $z \cdot w$

$$2\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right) = -2 + 2i. \quad \square$$

Actividad 6.7 *Fija el modo angular en radianes. Expresa en forma trigonométrica los complejos $z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 + 2i$.*
Sol. $z_1 = 3.6055\,(\cos 0.9828 + i\sin 0.9828)\,,$
$z_2 = 2.23607\,(\cos 2.0344 + i\sin 2.0344)$

Actividad 6.8 *Calcula una aproximación decimal en forma cartesiana de los complejos $z_1 = e^{2i}$, $z_2 = e^{-1.5i}$.*
Sol. $z_1 = -0.41615 + 0.90930,\ z_2 = 0.07074 - 0.99749i$

Actividad 6.9 *Cuando calculamos $e^{\theta i}$, el argumento está siempre en radianes. El modo angular de la calculadora no afecta al cálculo de $e^{\theta i}$. Para verificar esta afirmación, fija el modo angular en grados y calcula un aproximación decimal de $e^{2.6i}$. Verifica que el resultado obtenido es*

$$e^{2.6i} = \cos(2.6\,rad) + i\sin(2.6\,rad).$$