Cálculo científico y técnico con HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 2: **Recursos avanzados**
Tema 2.1 **Resolución numérica de ecuaciones**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Marzo 2008, versión 1.5

Contenido

Índice General

1 Introducción

La resolución de problemas científicos o técnicos conducen con frecuencia a la resolución de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$. La resolución exacta de una ecuación, tal como se hace con las ecuaciones polinómicas de primer o segundo grado, no siempre es posible. Cuando la resolución exacta no es viable, se emplean *métodos numéricos* que permiten aproximar una solución con la exactitud deseada. Los métodos numéricos exigen, normalmente, que conozcamos una estimación inicial[1] de la solución buscada.
Los comandos de la calculadora para la solución exacta de ecuaciones son SOLVEVX y SOLVE. Estos comandos, a menudo, no son capaces de determinar las soluciones de una ecuación $f(x) = 0$.

Actividad 1.1 *Resuelve la ecuación*

$$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$$

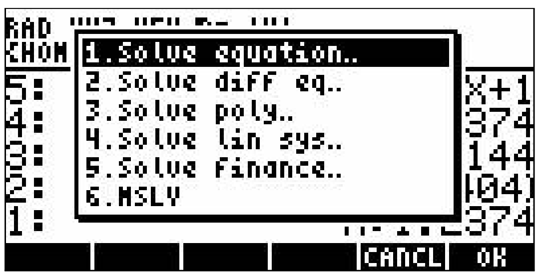
usando el comando SOLVEVX. (*Sol.* $x = 1, x = 2, x = -4$)

Actividad 1.2 *Intenta resolver la ecuación*

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x + 1 = 0$$

usando el comando SOLVEVX.(*Sol. La calculadora no puede resolver esta ecuación con* SOLVEVX)

Además de los comandos citados, la calculadora proporciona varios recursos para la resolución aproximada de ecuaciones que están agrupados en el menu[2] [NUM.SLV]



En particular nos interesan las opciones

- `1.Solve equation`
- `3.Solve polynomial`

[1] A veces el método exige más de una estimación. En el *método de la secante,* por ejemplo, hay que suministrar dos estimaciones iniciales; en el método de la bisección, necesitamos conocer un intervalo $[a, b]$ que contenga la solución.

[2] Tecla ↱[7].

2 Solve equation

2.1 Ecuaciones $f(x) = 0$

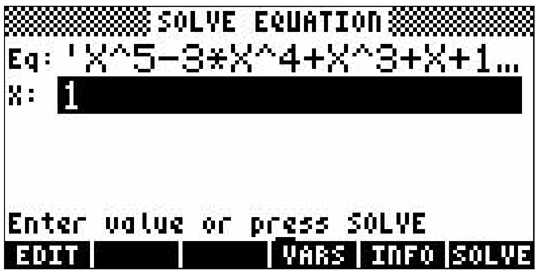
El formulario `Solve Equation` permite obtener una solución aproximada de una ecuación $f(x) = 0$ a partir de una estimación inicial. Tomemos por ejemplo la ecuación

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x + 1 = 0$$

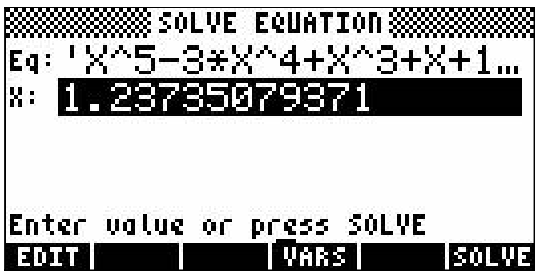
y supongamos que sabemos que existe una solución cercana a $x_0 = 1$. Procedemos como sigue:

1. Resaltamos el campo Eq y entramos la ecuación. Podemos pulsar [EQW] para acceder al editor de ecuaciones y escribir allí la ecuación. Para ecuaciones del tipo $f(x) = 0$ no es necesario escribir la ecuación completa, podemos entrar la expresión $f(x)$.

2. Una vez entrada la ecuación, el programa reconoce las variables de la ecuación. Entramos la aproximación inicial en el campo `X` y pulsamos [F6] para ejecutar la opción [SOLVE] del formulario

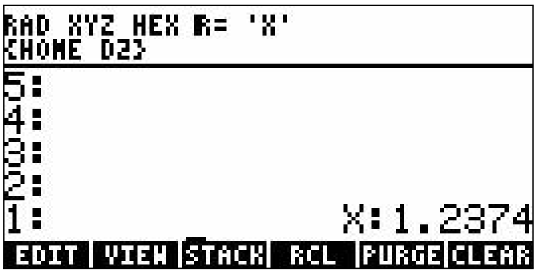


Como resultado obtenemos, en el campo X, el valor de la solución



Para salir de `Solve Equation`, pulsamos[3] [CANCEL]. Observamos que se ha cargado una copia de la solución en la pila.

[3] Tecla [ON] cuando la calculadora está encendida.



Actividad 2.1 *La ecuación*

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x + 1 = 0$$

tiene 3 *soluciones reales. Intenta calcularlas dando distintos valores iniciales en el formulario* Solve Equation. (*Sol.* $1.2374, -0.54036, 2.51435$.)

Actividad 2.2 *Representa esquemáticamente la ecuación*

$$e^x = 1 + \cos x$$

¿Cuantas soluciones positivas tiene? Determínalas. Determina una solución negativa (*Sol. Tiene una solución positiva* $x = 0.60134$. *Con el valor inicial* $x_0 = -1$, *se obtiene* $x = -2.789129$.)

2.2 Uso avanzado de Solve Equation

El entorno de resolución aproximada `Solve Equation` sólo permite resolver en una variable, sin embargo, la ecuación puede tener varias variables. Entonces usamos el formulario para dar los valores adecuados y resolver en la variable que deseemos. Para aclarar esta forma de trabajar veamos el siguiente ejemplo. Consideremos la ecuación de la posición en el *movimiento rectilíneo uniformemente acelerado*

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2,$$

donde:

- x es la posición en el tiempo t,
- x_0 es la posición inicial en $t = 0$,
- v_0 es la velocidad inicial,
- a es la aceleración.

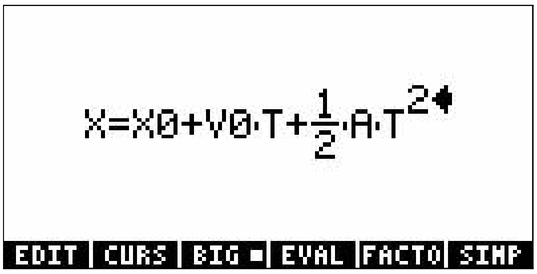
Y supongamos que tenemos que completar la siguiente tabla

x_0	v_0	a	t	x
1.0	2.5	2.3	5.0	
1.3	2.5	2.3		45.0
1.5	2.4		6.5	80.7
1.7		3.0	7.5	100.0
	2.8	2.1	6.5	88.5

Procedemos como sigue.

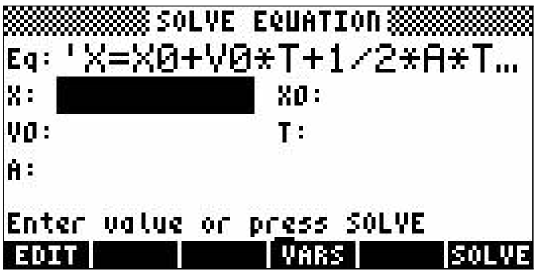
1. Accedemos al área de variables pulsando [VAR]. Miramos si en HOME existen las variables X, X0, V0, A y T. Si existen las borramos.

2. Creamos un directorio llamado MRUA y entramos en él. Accedemos al formulario `Solve Equation`, nos situamos en el campo EQ y pulsamos [EQW] para entrar en el editor de ecuaciones. Escribimos la ecuación



   y pulsamos ENTER para aceptarla.

3. De vuelta al formulario, vemos que la calculadora ha reconocido las variables de la ecuación y las ha incluido en el formulario

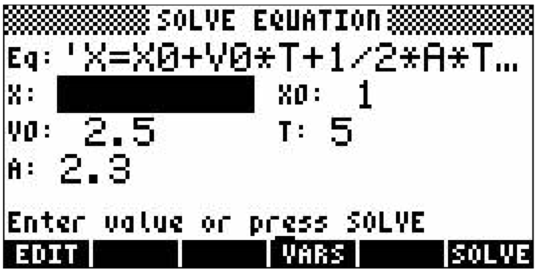


4. Sólo nos queda colocar los valores conocidos en los campos respectivos, resaltar el campo del valor a calcular y pulsar [F6] para ejecutar [SOLVE]. La ecuación se resuelve respecto de la variable resaltada en el momento de ejecutar [SOLVE]. Si el campo a resolver contiene un valor, entonces este valor se toma como valor inicial para el método de aproximación.

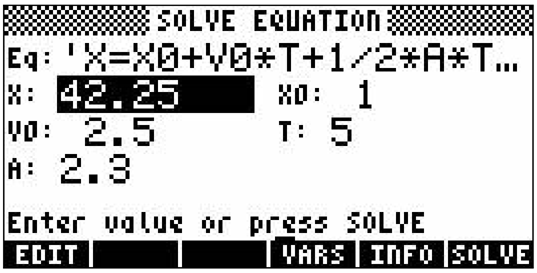
Para calcular la primera fila de la tabla,

x_0	v_0	a	t	x
1.0	2.5	2.3	5.0	

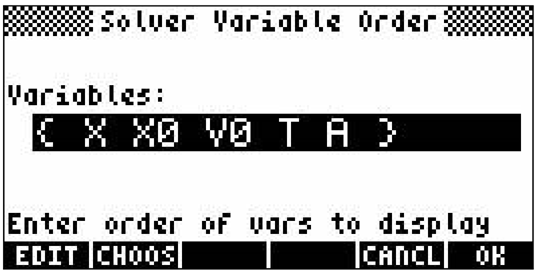
entramos los siguientes valores



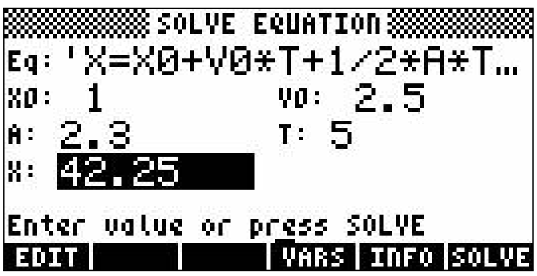
resaltamos X y pulsamos [F6], se obtiene



La tecla [F4] con la etiqueta [VARS] nos permite modificar la disposición de las variables en el formulario.



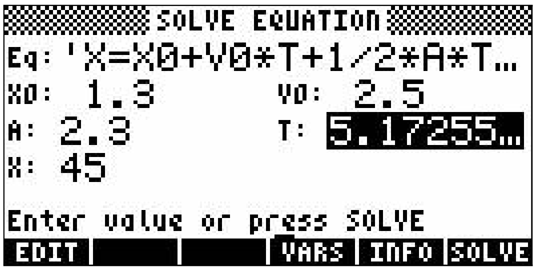
Para hacerlo, pulsamos [EDIT] y modificamos la lista de variables. En nuestro caso, vamos a tomar el orden {X0, V0, A, T, X} para ajustarnos al orden de la tabla de datos. Una vez modificada la lista y aceptados los cambios pulsando [OK], el formulario presenta el siguiente aspecto



Tomemos ahora la segunda fila de la tabla

x_0	v_0	a	t	x
1.3	2.5	2.3		45.0

Esta claro que la determinación de t supone la resolución de una ecuación de grado 2. Entramos los datos en el formulario y resolvemos en t



Actividad 2.3 *Completa manualmente la tabla*

x_0	v_0	a	t	x
1.0	2.5	2.3	5.0	
1.3	2.5	2.3		45.0
1.5	2.4		6.5	80.7
1.7		3.0	7.5	100.0
	2.8	2.1	6.5	88.5

Actividad 2.4 *Completa la tabla usando* Solve Equation.

3 Solve polynomial

Hemos visto que el entorno de resolución numérica `Solve Equation` nos proporciona únicamente una solución; para obtener las restantes debemos usar valores iniciales adecuados. En el caso particular de las ecuaciones polinómicas,

$$P(x) = 0$$

existen métodos especiales que permiten aproximar todas las soluciones, tanto reales como complejas, sin que sea necesario proporcionar estimaciones iniciales.

3.1 Comando PROOT

El comando PROOT calcula los ceros de un polinomio a partir de un vector con los coeficientes. Como resultado, obtenemos un vector cuyos elementos son los ceros del polinomio, tanto reales como complejos. Además, este

comando no requiere ningún tipo de información acerca de los ceros. Podemos encontrar el comando PROOT en el catálogo de funciones o bien en la tercera página del menú[4] [ARITH][POLY].
Consideremos, por ejemplo, la ecuación

$$x^5 - 3x^4 + x^3 + x - 1 = 0.$$

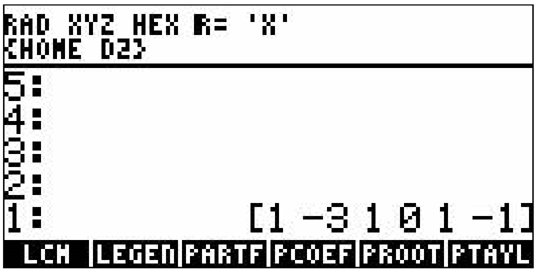
Como el polinomio es de grado impar, sabemos que tiene al menos una raíz real. Para aplicar PROOT, simplemente cargamos en el nivel 1 de la pila un vector con los coeficientes del polinomio, dispuestos en orden decreciente. Es decir, para el polinomio

$$P(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

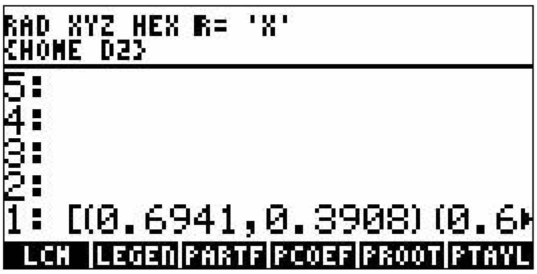
empleamos el vector

$$[a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0].$$

En nuestro ejemplo es[5]

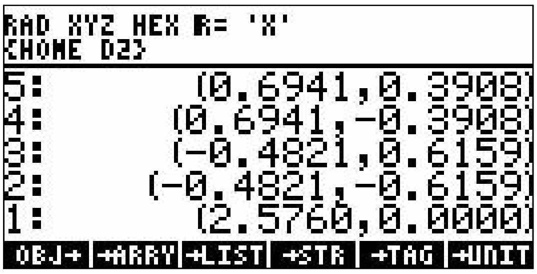


pulsamos [F5] para ejecutar PROOT y obtenemos



Para ver mejor las soluciones, *rompemos* el vector con el comando[6] OBJ→ . Como resultado obtenemos, en el nivel 1 de la pila, la dimensión del vector y, en los restantes, los ceros del polinomio. Como el polinomio tiene raíces complejas, todos las raíces se presentan en formato complejo.

[4] Se accede a [ARITH] con ↰[1].
[5] Nótese que falta el término x^2, por lo tanto, $a_2 = 0$.
[6] En [PRG][TYPE].



Observamos que nuestro polinomio tiene un cero real

$$x_1 = 2.5760$$

y dos pares de ceros complejos conjugados

$$z_1 = 0.6941 + 0.3908i, \qquad z_2 = 0.6941 - 0.3908i,$$

$$z_3 = -0.4821 + 0.6159i, \qquad z_4 = -0.4821 - 0.6159i.$$

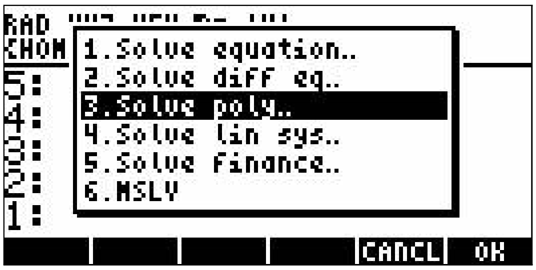
Actividad 3.1 *Calcula la solución real de la ecuación*

$$x^7 - x^5 + x^3 - x + 2 = 0.$$

(*Sol.* $x = -1.\,22536\,05.$)

3.2 Formulario Solve Polynomial

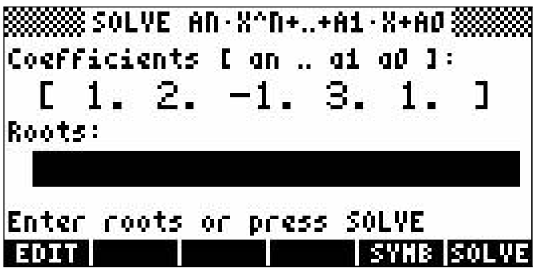
En el menu [NUM.SLVR] encontramos la opción `Solve Polynomial`



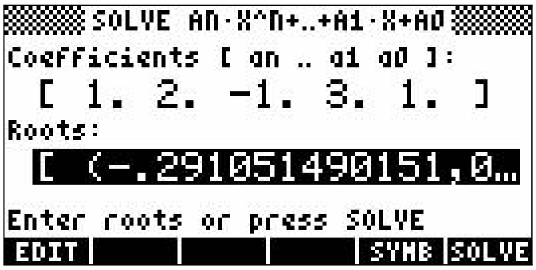
que nos permite obtener los mismos resultados que el comando PROOT. Para resolver la ecuación polinomial

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0,$$

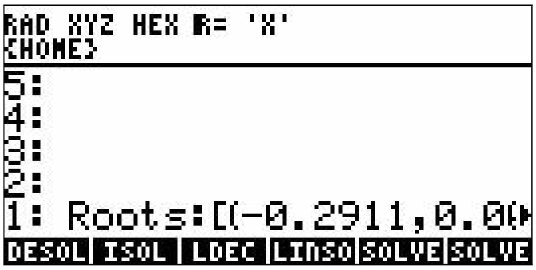
entramos el vector de coeficientes en el campo `Coefficients`



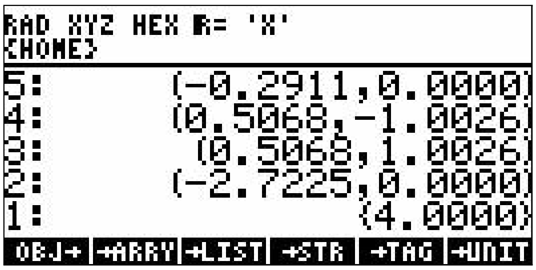
nos desplazamos al campo `Roots` y pulsamos [F6] para ejecutar la opción [SOLVE] del formulario.



Pulsamos CANCEL para volver a la pila y encontramos en el nivel 1 un vector con las soluciones de la ecuación con la etiqueta `Roots`.



Para ver bien las soluciones, primero ejecutamos EVAL para eliminar la etiqueta Roots. Después ejecutamos OBJ→, para romper el vector y obtenemos



En el nivel 1 está la dimensión del vector que acabamos de romper. En los niveles superiores se encuentran las componentes del vector. Como el polinomio tiene raíces complejas, todas las soluciones aparecen en formato complejo. Vemos que el polinomio tiene dos raíces reales

$$x_1 = -0.\,2911, \qquad x_2 = -2.\,7225,$$

y un par de raíces complejas conjugadas

$$z_1 = 0.5068 + 1.0026i, \qquad z_2 = 0.5068 - 1.0026i.$$

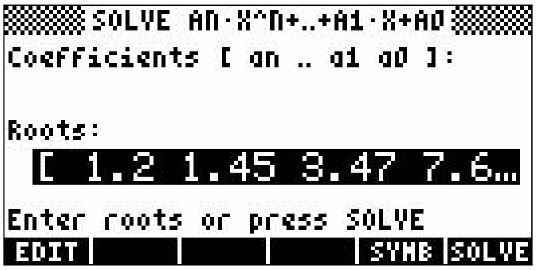
Actividad 3.2 *Determina las soluciones reales de la ecuación*

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0.$$

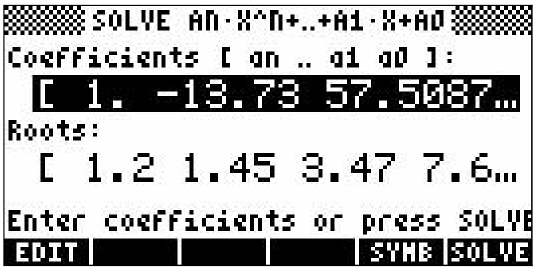
(Sol. $x = -2.78991, x = 0.341144.$)
El formulario `Solve Polynomial` tiene otros recursos interesantes. La opción [SYMB] permite construir la expresión algebraica del polinomio a partir de sus coeficientes. También podemos calcular el vector de coeficientes de un polinomio a partir de sus ceros. Por ejemplo, consideremos un polinomio cuyos ceros son

$$x_1 = 1.20, \quad x_2 = 1.45, \quad x_3 = 3.47, \quad x_4 = 7.61,$$

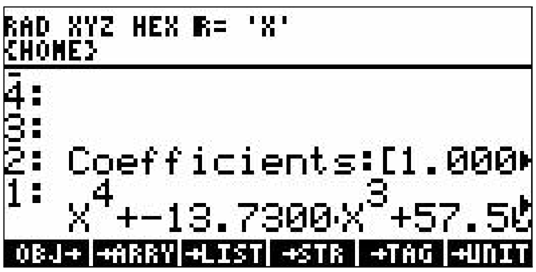
entramos el vector de ceros en el campo `Roots`



luego nos desplazamos al campo `Coefficients` y pulsamos [F6] para ejecutar la opción [SOLVE] del formulario.



Como resultado se obtiene un vector con los coeficientes de un polinomio que tiene los ceros fijados. Una copia del vector de coeficientes se carga en la pila. Si antes de abandonar el formulario pulsamos [F5] para ejecutar la opción [SYMB], también se carga en la pila la expresión algebraica del polinomio.



Actividad 3.3 *Determina el polinomio* $P(x)$ *que tiene los ceros* $x_1 = 1.230$, $x_2 = -0.234$ *y un cero doble en* $x_3 = 3.467$.
(*Sol.* $P(x) = x^4 - 7.930x^3 + 18.638x^2 - 9.976x - 3.460.$)

Ejemplo 3.1 *Extremos relativos de un polinomio.*

Queremos determinar los máximos y mínimos relativos del polinomio

$$P(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x - 1$$

Calculamos la derivada

$$P'(x) = 5x^4 - 9x^2 + 2x - 2$$

y resolvemos la ecuación

$$5x^4 - 9x^2 + 2x - 2 = 0,$$

para determinar los puntos críticos. Cargamos el vector de coeficientes

$$[5, 0, -9, 2, -2]$$

y ejecutamos el comando PROOT. Obtenemos las raíces reales

$$x_1 = -1.\,49837, \qquad x_2 = 1.\,31424.$$

La segunda derivada es

$$P''(x) = 20x^3 - 18x + 2.$$

En los puntos críticos, la derivada toma el valor

$$P''(-1.\,49837) = -38.\,3095, \qquad P''(1.\,31424) = 23.\,7435.$$

Por lo tanto, P tiene un máximo relativo en x_1 con valor $P_{\max} = 6.\,7813$ y un mínimo relativo en x_2 con valor $P_{\min} = -4.\,79044$. □

3.3 Comando PEVAL

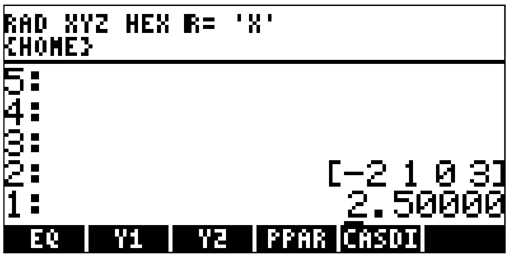
Para evaluar un polinomio podemos usar el comando PEVAL. Podemos encontrar PEVAL en el catálogo de funciones. El diagrama de pila de PVAL es el siguiente

PEVAL			
Nivel 2	Nivel 1	$\Rightarrow$	Nivel 1
$[a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0]$	x_0		$P(x_0)$

Si tenemos el polinomio

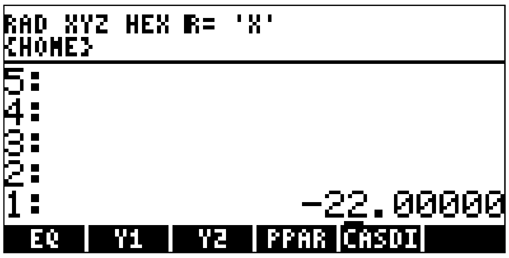
$$P(x) = 3 + x^2 - 2x^3$$

y queremos calcular $p(2.5)$, cargamos en la pila el polinomio en forma de vector[7] y el valor 2.5



A continuación buscamos el comando en el catálogo

y lo ejecutamos, obtenemos



Actividad 3.4 *Usa* PEVAL *para calular los valores de* $P''(-1.49837)$ *y* $P''(1.31424)$ *en el ejemplo anterior.*

[7] Recuerda que los coeficientes deben aparecer según grados decrecienes.