

Cálculo científico y técnico con
HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 2: **Recursos Avanzados**
Tema 2.2 **Recursos de cálculo gráfico**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Marzo 2008, versión 1.4.

Contenido

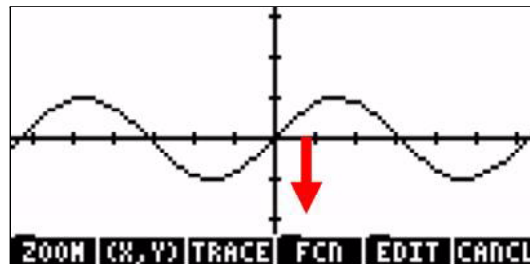
1. El entorno de cálculo gráfico
2. Ejemplo de uso de algunos comandos
3. Ejemplos de aplicación

Índice General

1	El entorno de cálculo gráfico [FCN]	1
2	Ejemplos de uso de los comandos	2
2.1	Comando ROOT	2
2.2	Comando ISECT	4
2.3	Comando EXTR	6
3	Ejemplos de aplicación	7
3.1	Cálculo de áreas	7
3.2	Longitud de arco	8

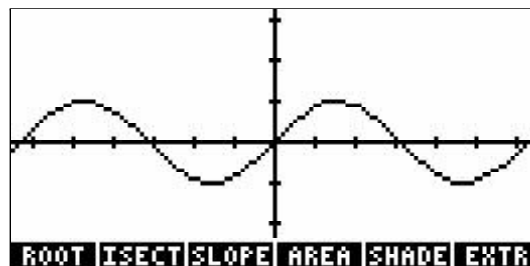
1 El entorno de cálculo gráfico [FCN]

La aplicación de representación gráfica contiene un menú de herramientas de cálculo [FCN] para funciones del tipo $y = f(x)$. El acceso se realiza desde la *pantalla gráfica* pulsando [F4].



Las herramientas de [FCN] nos permiten, entre otras cosas, calcular el los puntos de corte de una curva con el eje OX, el punto de corte entre dos curvas y la determinación de extremos. Para ello usa métodos de cálculo numérico, tomando como valor inicial la coordenada x de la posición actual del cursor.

En la primera página de [FCN]



encontramos las siguientes opciones:

- [ROOT] Calcula el corte con el eje OX.
- [ISECT] Calcula el punto de corte entre dos curvas.
- [SLOPE] Calcula la pendiente en el punto de la gráfica.
- [AREA] Calcula numéricamente integrales indefinidas.
- [SHADE] Sombrea una zona bajo la curva. Si hay dos funciones, sombrea la región entre las curvas.
- [EXTR] Calcula extremos relativos.

En todos los casos, se toma el valor de x de la posición actual del cursor. Al presentar los resultados, desaparece la línea de menú. Pulsando [+], [-] o una de las teclas de función [F1], ..., [F6], la línea de menú vuelve a ser

visible. También se carga en la pila una copia del resultado con la etiqueta correspondiente. La segunda página del menú [FCN] contiene las siguientes opciones:

- [F(x)] Calcula el valor de la función.
- [F'(x)] Calcula la función derivada y genera una representación conjunta con la función. La expresión de la derivada se añade a la lista de funciones a representar.
- [TANL] Calcula la recta tangente y la representa conjuntamente con la función. No añade la ecuación de la recta a la lista de funciones a representar.
- [NXEQ] Cambia de función *activa*. En las representaciones múltiples, la variable EQ contiene una lista con las expresiones a representar. Todos los comandos, salvo ISECT, actúan sobre una sola función. Si EQ contiene una lista, los comandos actúan sobre la primera función de la lista (*función activa*). De hecho, NXEQ hace rotar los elementos de la lista contenida en EQ.
- [VIEW] Muestra la función activa.
- [PICT] Sale de [FCN] y vuelve al menú principal de la pantalla gráfica.

Actividad 1.1 *Dibuja la curva $y = \sin(x)$ con $x \in [-3, 3]$. Usa [AUTO] para calcular el rango de y . Accede a [FCN] y observa las opciones descritas en las dos páginas de menú. Oculta y visualiza la línea de menú usando [+].*

2 Ejemplos de uso de los comandos

A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo usar los comandos¹ ROOT, ISECT y EXTR.

2.1 Comando ROOT

El comando ROOT calcula el corte de la curva con el eje X . Consideremos la curva

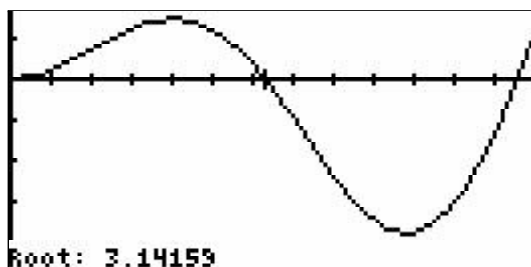
$$y = x \sin(x).$$

La representación con $x \in [0, 6.5]$, $y \in [-6, 2]$ es

¹En realidad, ROOT, ISECT y EXTR no son comandos, es decir, no los encontrarás en el catálogo de comandos y funciones, y sólo puedes ejecutarlos pulsando la tecla correspondiente del menú [FCN].



Situamos el cursor en proximidad del punto de corte y pulsamos [ROOT].



El cursor se sitúa en el punto de corte y se muestra la coordenada x del punto de corte en la pantalla. En la pila se guarda una copia etiquetada del valor.



Actividad 2.1 Representa la curva $y = \cos x - x$ y calcula el corte con el eje X . (Sol. $x = 0.73909$)

Actividad 2.2 Representa la curva $y = \cos x - x^2$ y calcula el corte con el eje X . (Sol. $x = \pm 0.82413$)

Actividad 2.3 Representa la curva $y = \cos(x^2) - x$ y calcula el corte con el eje X . (Sol. $x = 0.80107$)

Actividad 2.4 Representa la curva $y = e^x + x^3$ y calcula el corte con el eje X . (Sol. $x = -0.77288$)

2.2 Comando ISECT

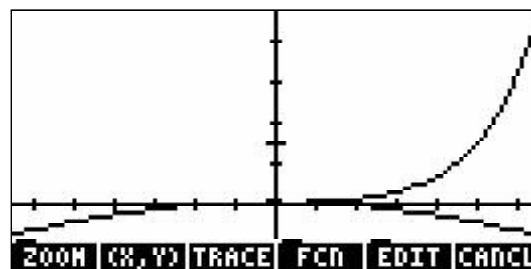
El comando ISECT calcula el punto de corte de dos curvas. Por ejemplo, consideremos las curvas:

$$y = e^x, \quad y = 2 - x^2.$$

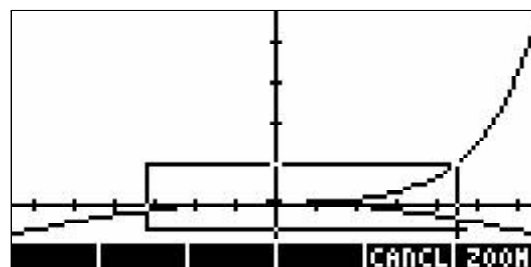
Accedemos al formulario Equation Entry, y definimos las dos funciones



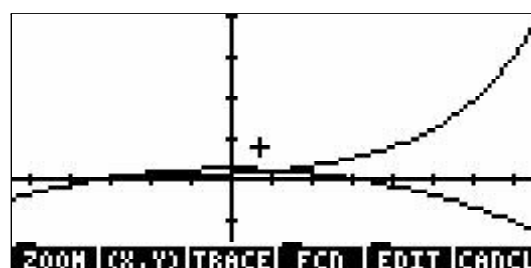
Para ajustar los rangos de representación podemos usar BOXZ, que nos dará los valores aproximados de la región de interés. Por ejemplo, supongamos en un primer intento hemos obtenido el siguiente gráfico



Seleccionamos la zona de interés con BOXZ



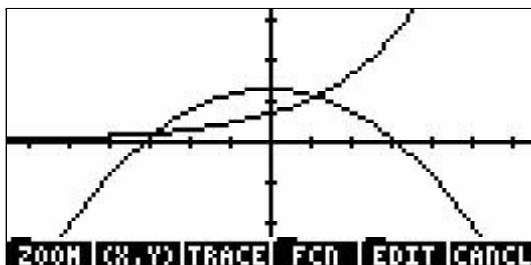
y aplicamos el ZOOM



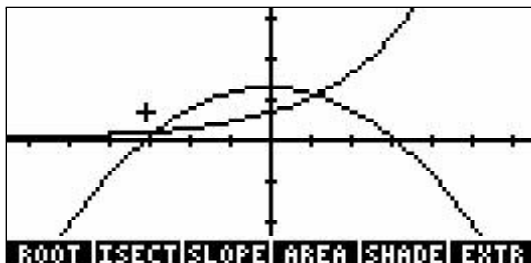
Podemos continuar aplicando BOXZ sobre la zona de interés, o bien, cancelar la pantalla gráfica y acceder al formulario Plot-Window



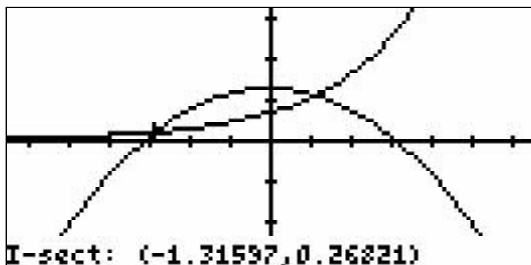
para ajustar manualmente el rango de representación. Si ajustamos el rango de x a $[-3, 3]$ y el rango de y a $[-5, 5]$, resulta



Vamos a calcular el punto de corte con $x < 0$. Situamos el cursor en las proximidades del corte y pulsamos [FCN][ISECT]



Como resultado, obtenemos



Una copia etiquetada del resultado se carga en la pila. Pulsa [+]
 para que aparezca nuevamente la línea de menús.

Actividad 2.5 Representa conjuntamente las curvas $y = e^x$, $y = 2 \cos x$. Usa [(x,y)] y [TRACE] para determinar aproximadamente el punto de intersección del primer cuadrante. Usa ISECT para determinarlo con precisión. Sol (0.5398, 1.7156)

Actividad 2.6 Representa conjuntamente las curvas $y = e^{-x}$, $y = 4 \sin x$. Usa [(x,y)] y [TRACE] para determinar aproximadamente los dos primeros puntos de intersección con $x > 0$. Usa ISECT para determinarlos con precisión.

Sol. (0.2051, 0.8146), (3.1307, 0.0437).

Actividad 2.7 El formato del punto de corte se ve afectado por el modo de coordenadas. Fija el modo de coordenadas Polar. Calcula gráficamente los puntos de corte de las curvas $y = 1 - x^2$, $y = \sqrt{x}$ ¿Qué resultado obtienes? Cancela el gráfico, reestablece el modo de coordenadas Rectangular y observa como se modifica el resultado en la pila y en el gráfico.

(Sol. Corte en coordenadas polares ($r = 0.8946, \theta = 0.9438$ rad). Coordenadas rectangulares ($x = 0.5249, y = 0.7245$))

Actividad 2.8 Intenta determina manualmente el punto de corte de las curvas $y = 1 - x^2$, $y = \sqrt{x}$. Si es preciso, usa las herramientas para solucionar ecuaciones de la calculadora. (Sol. Se obtiene la ecuación $y^4 + y - 1 = 0$. El comando SOLVEX no puede resolverla, si usamos PROOT obtenemos las raíces reales $y = -1.2207, y = 0.7245$)

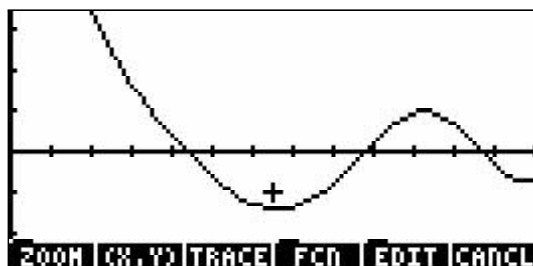
Nota. Si EQ contiene una lista con más de dos expresiones, el comando ISECT se aplica a las dos primeras.

2.3 Comando EXTR

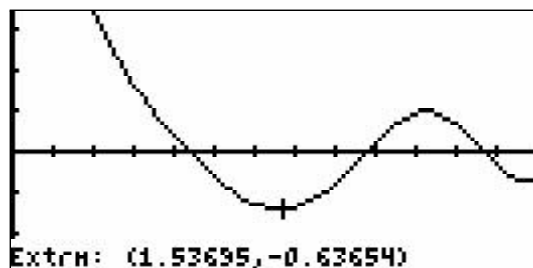
El comando EXTR determina los extremos relativos. Tomemos por ejemplo la función

$$y = \frac{\sin(1 - x^2)}{x}$$

en el intervalo $x \in [0, 3]$.



Situamos el cursor cerca del primer mínimo relativo, y pulsamos [FCN][EXTR],



El cursor se sitúa en la posición del mínimo, aparecen las coordenadas del punto en la base de la pantalla gráfica y se carga una copia etiquetada del punto en la pila.

Actividad 2.9 Fija el modo angular en radianes. Calcula el extremo relativo que tiene

$$y = \frac{\sin(1 - x^2)}{x}$$

en las proximidades de $x = 1.5$. Sol. $y_{\min} = -0.6365$ en $x = 1.5369$.

Actividad 2.10 Determina los extremos relativos de la función

$$f(x) = \frac{\sin(x^2) + \cos(x^2)}{x}$$

en el intervalo $x \in [0, 3]$. (Sol. Mínimo para $x = 1.9483$, $y_{\min} = -0.7196$. Máximo en $x = 2.6452$, $y_{\max} = 0.5333$)

3 Ejemplos de aplicación

3.1 Cálculo de áreas

Ejemplo 3.1 Representa el recinto limitado por las curvas

$$y = \sin x, \quad y = e^{-x^2},$$

la recta $x = 2$ y el eje OX . Calcula el área del recinto.

Representamos las curvas $y = \sin x$, $y = e^{-x^2}$



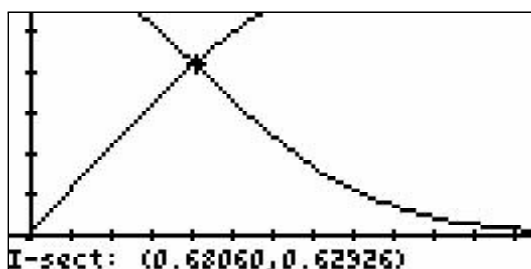
El área del recinto tiene el valor

$$\int_0^{x_1} \sin x \, dx + \int_{x_1}^2 e^{-x^2} \, dx$$

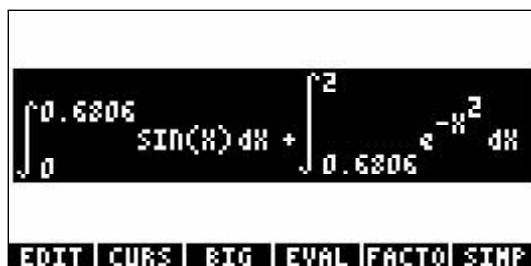
Vemos que necesitamos calcular x_1 , esto es la coordenada x del punto de corte de las curvas, para ello debemos resolver numéricamente la ecuación

$$\sin(x) - e^{-x^2} = 0.$$

Usando ISECT, obtenemos



Por lo tanto, el valor del área de la región es



de donde obtenemos el valor $A = 0.5162$. \square

Actividad 3.1 Resuelve la ecuación $\sin(x) - e^{-x^2} = 0$ usando el formulario Solve Equation de [NUM.SLV].

3.2 Longitud de arco

Ejemplo 3.2 Determina la longitud del arco de parábola $y = x^2$ desde el origen hasta su intersección con la curva $y = \cos x$.

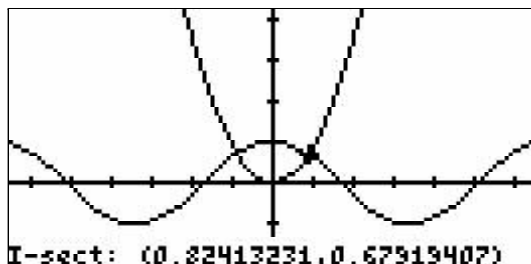
Para una curva $y = f(x)$, la longitud de arco desde el punto $(x_1, f(x_1))$ hasta el punto $(x_2, f(x_2))$ se calcula mediante la integral

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

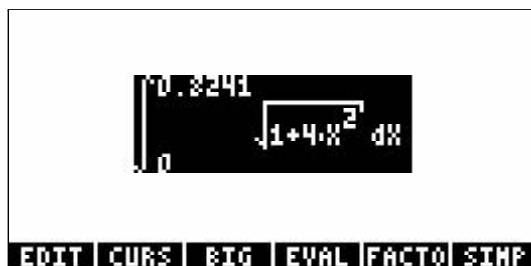
En nuestro caso, es $x_1 = 0$, y $f'(x) = 2x$, por lo tanto

$$L = \int_0^{x_2} \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

el problema está en determinar x_2 . Representando las curvas y usando ISECT, obtenemos



Por lo tanto, la longitud de arco se calcula como



de donde obtenemos $L = 1.1129$. \square

Actividad 3.2 *Calcula la longitud del arco de parábola $y = 2 - x^2$ que queda por encima de la curva $y = e^x$.*

(Sol. $L = \int_{-1.3160}^{0.5373} \sqrt{1 + 4x^2} dx = 2.9041$)

Actividad 3.3 *Calcula el perímetro y el área de la región*



limitada por las curvas $y = \sin x$, $y = x^2 - x$.

(Sol. Area $\int_0^{1.61755} (\sin(x) - x^2 + x) dx = 0.94421$)

(Perímetro $\int_0^{1.61755} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx + \int_0^{1.61755} \sqrt{1 + (2x - 1)^2} dx = 4.2850$)