Cálculo científico y técnico con HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 2: **Recursos avanzados**
Tema 2.3 **Algunos recursos algebraicos**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Marzo 2008, versión 1.2

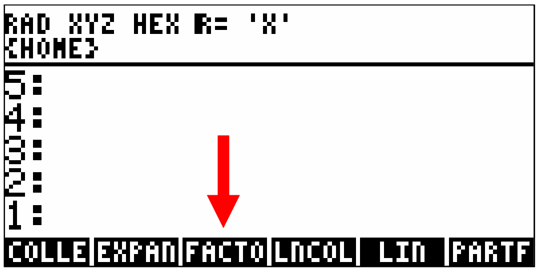
Contenido

Índice General

1 Manipulación de productos

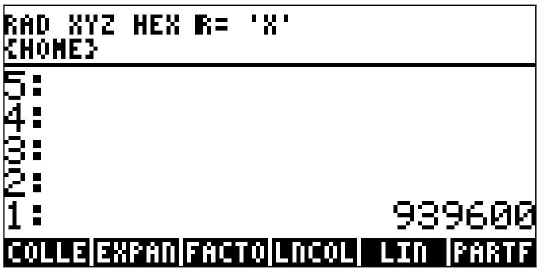
1.1 Factor

El comando FACTOR factoriza polinomios, y enteros. Puedes encontrar el comando en el menú ALG.

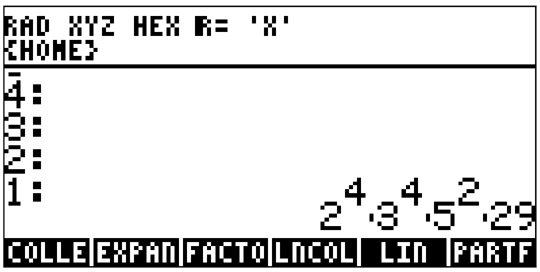


Para un buen funcionamiento de FACTOR, la calculadora debe estar en modo exacto.

Actividad 1.1 *Fija el modo real exacto. Entra el entero* 939600,



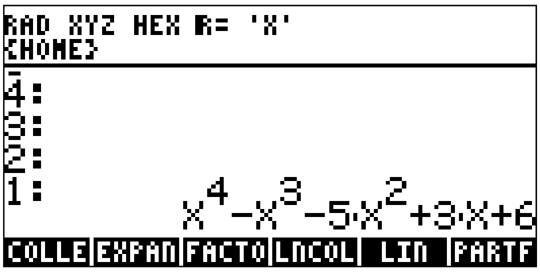
ejecuta FACTOR, *debes obtener*



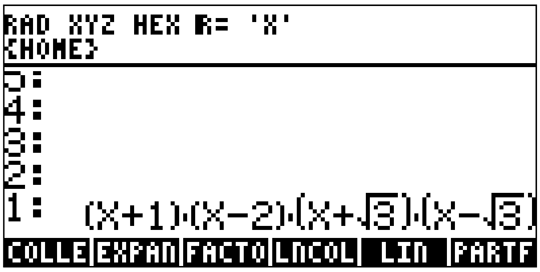
Actividad 1.2 *Entra el número* 939600, *fija el modo real aproximado y ejecuta el comando* FACTOR. *Observa que, en este caso no se produce la factorización.*

Actividad 1.3 *Queremos factorizar el polinomio* $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6$.

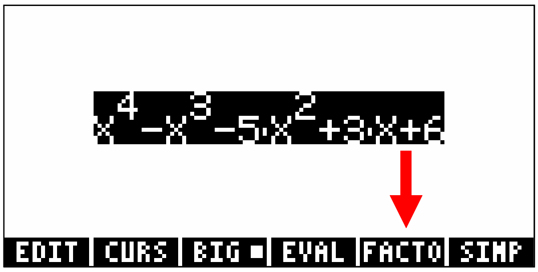
1. *Entra el polinomio en la pila.*



2. *Accede al menú* [ALG] *y ejecuta el comando* FACTOR. *El resultado es:*



También se puede ejecutar el comando directamente desde el menú de herramientas del editor de ecuaciones. Para factorizar una expresión, debes seleccionarla y pulsar [F5] para ejecutar FACTOR.



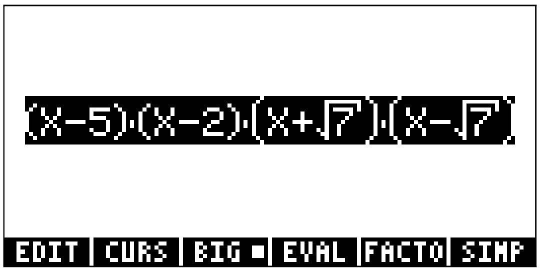
Si el comando FACTOR no está visible, pulsa la tecla[1] TOOL, para acceder al menú de herramientas del editor de ecuaciones.

Actividad 1.4 *Accede al editor de ecuaciones. Observa la etiqueta correspondiente al comando* FACTOR. *Pulsa la tecla* [VARS] *para acceder al área de variables. Recupera el menú de herramientas del editor de ecuaciones pulsando la tecla* [TOOL]. *Factoriza el polinomio*

$$x^4 + 3x^2 - 7x^3 + 49x - 70$$

debes obtener

[1] Tecla $(2, 3)$.

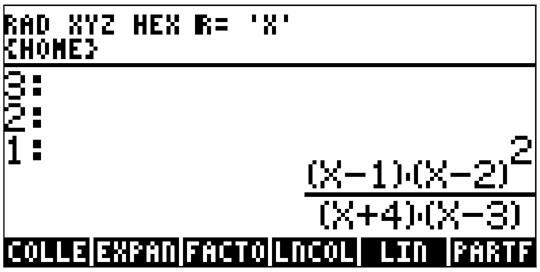


El comando FACTOR también actúa sobre cocientes de enteros y polinomios, en ese caso factoriza el numerador y el denominador.

Actividad 1.5 *Factoriza la función racional*

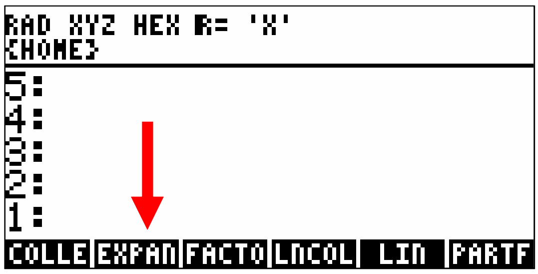
$$\frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2 + x - 12},$$

debes obtener



1.2 EXPAND, EVAL, SIMPLIFY

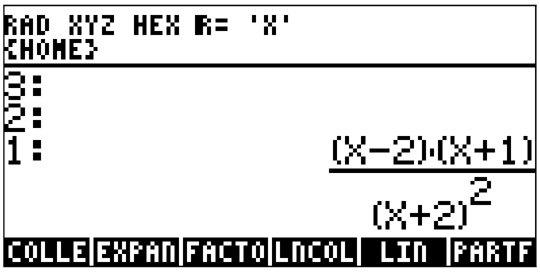
El comando EXPAND realiza la operación inversa de FACTOR, esto es, efectúa los productos y opera términos semejantes. Puedes encontrar el comando EXPAND en el menú ALG.



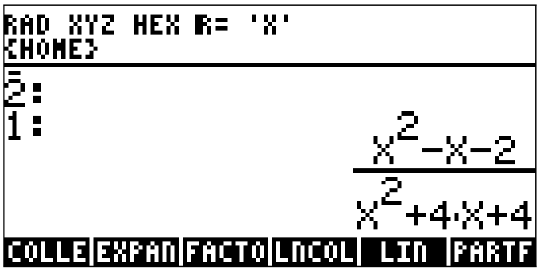
Actividad 1.6 *Entra el producto* $(x-3)(x-4)(x-5)$, *ejecuta el comando* EXPAND.

Puedes obtener el mismo resultado con EVAL.

Actividad 1.7 *Entra la fracción*

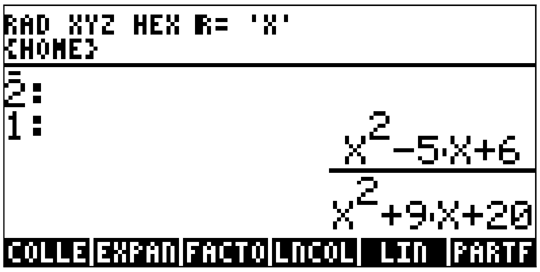


y ejecuta EXPAND*. Obtendrás*

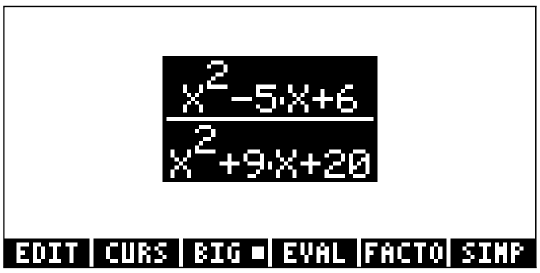


Actividad 1.8 *Repite la actividad anterior usando el comando* EVAL*.*

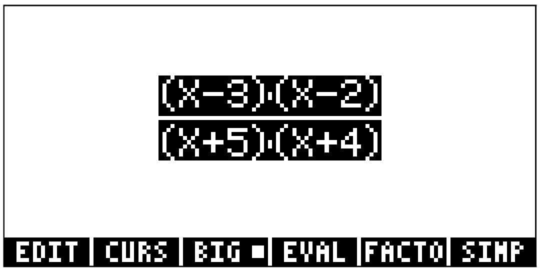
Actividad 1.9 *Entra en la pila la fracción*



pulsa la tecla [▼] *para pasar al editor de ecuaciones*



ejecuta el comando FACTOR*, obtendrás*



pulsa [F5] *para ejecutar* EVAL *o* [F6] *para ejecutar el comando* SIMPLIFY*. En ambos casos se efectúan los productos y obtendrás la fracción de partida.*

2 Manipulación de funciones racionales

Una función racional es el cociente de dos polinomios, por ejemplo,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x - 1}.$$

Los comandos PROPFRAC y PARTFRAC son especialmente útiles para el manejo de funciones racionales.

2.1 Comando PROPFRAC

Una función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

es *propia en grado* cuando el grado del numerador es estrictamente inferior al grado del denominador. La función racional

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^3 + x - 1}$$

es propia en grado. Por el contrario, la función

$$g(x) = \frac{x^4 + x^3 + 2x + 3}{x^2 - 5x + 6}$$

es impropia en grado. Si la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

es impropia en grado, esto es, si se cumple

$$grado\,[p(x)] \geq grado\,[q(x)]$$

entonces puede expresarse como suma de un polinomio y de una función racional propia en grado, para ello dividimos el polinomio $p(x)$ por $q(x)$ y obtenemos la expresión

$$f(x) = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde $c(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el resto de dividir $p(x)$ por $q(x)$; la fracción

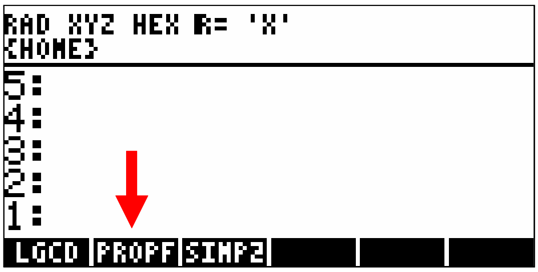
$$\frac{r(x)}{q(x)}$$

es siempre propia en grado.
El comando PROPFRAC permite expresar una función racional impropia en grado en la forma

$$f(x) = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

Puedes obtener el comando en la segunda página del menú ARITH

Para ello, pulsa ↰ [1] y [NEXT] para acceder a la segunda página del menú



También puedes obtenerlo del catalogo de funciones CAT, o bien, teclearlo directamente.

Actividad 2.1 *Localiza el comando* PROPFRAC *en el menú* ARITH.

Actividad 2.2 *Localiza el comando* PROPFRAC *en el catálogo de funciones.*

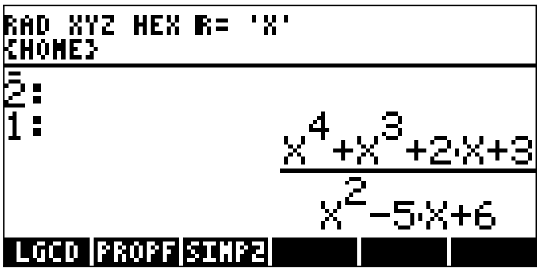
Recuerda que si pulsas $[\alpha][P]$*, avanzarás en el catálogo hasta la letra P.*

Actividad 2.3 *En esta actividad vamos a expresar la función racional*

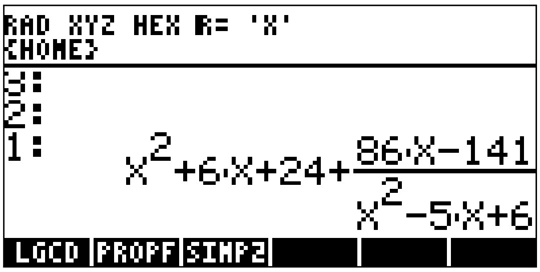
$$\frac{x^4 + x^3 + 2x + 3}{x^2 - 5x + 6}$$

como suma de polinomio y fracción propia. Para ello, sigue los siguiente pasos:

1. *Entra la fracción en la pila.*



2. *Accede a la segunda página del menú* ARITH *y ejecuta el comando* PROPFRAC*, obtendrás:*



Actividad 2.4 *Divide manualmente los polinomios*

$$p(x) = x^4 + x^3 + 2x + 3, \quad q(x) = x^2 - 5x + 6$$

y verifica que el cociente es

$$c(x) = x^2 + 6x + 24$$

y que el resto es

$$r(x) = 86x - 141.$$

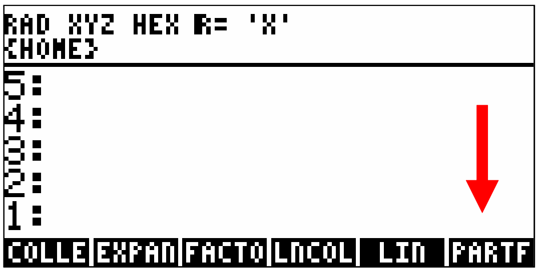
Actividad 2.5 *Expresa la fracción*

$$f(x) = \frac{x^4 + x - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

como suma de polinomio y fracción propia.
Sol. $f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

2.2 Comando PARTFRAC

El comando PARTFRAC calcula la *descomposición en fracciones simples* de una función racional. Seguramente has usado la descomposición en fracciones simples en la integración de funciones racionales. Otra aplicación notable es el cálculo de la antitransformada de Laplace.
Puedes acceder al comando PARTFRAC en la primera página del menú ALG.



También puedes buscarlo en el catálogo de funciones y comandos [CAT],

o teclearlo directamente.

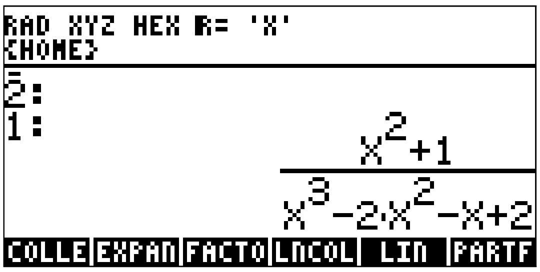
Actividad 2.6 *Localiza el comando* PARTFRAC *en el menú* ALG.

Actividad 2.7 *Localiza el comando* PARTFRAC *en el catálogo de funciones.*

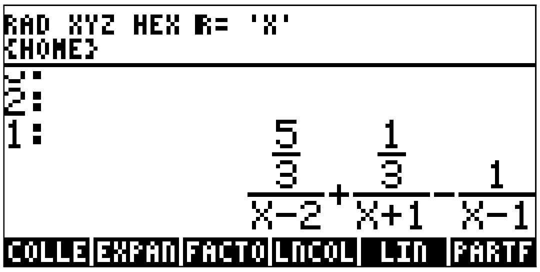
Actividad 2.8 *El objetivo de esta actividad es descomponer en fracciones simples la función racional*

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-2x^2-x+2}.$$

Para ello, carga la expresión en la pila



y ejecuta el comando PARTFRAC, *debes obtener:*



Actividad 2.9 *Realiza manualmente la descomposición del ejercicio anterior. Para ello, descompón previamente el denominador con el comando* FACTOR.

La descomposición en fracciones simples sólo se aplica a fracciones racionales propias en grado. Si tenemos

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

y el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, primero hay que expresar la fracción en la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

y, posteriormente, se realiza la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{r(x)}{q(x)}.$$

Así, por ejemplo, si tenemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3+x+1}{x^2+x-2},$$

primero dividimos $p(x)$ por $q(x)$ y obtendremos

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+x-2} = x-1+\frac{4x-1}{x^2+x-2},$$

seguidamente, descomponemos

$$\frac{4x-1}{x^2+x-2}$$

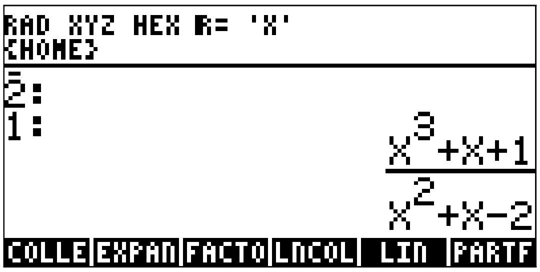
en fracciones simples, resulta

$$\frac{4x-1}{x^2+x-2} = \frac{4x-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}.$$

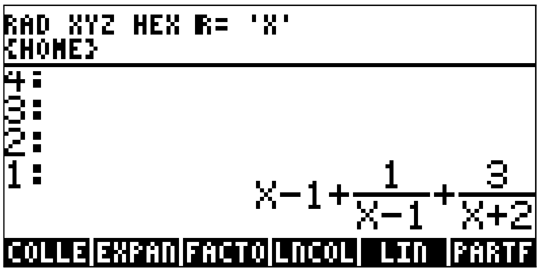
Finalmente, obtenemos

$$\frac{x^3+x+1}{x^2+x-2} = x-1+\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}.$$

El comando PARTFRAC se aplica directamente a funciones raciones impropias en grado, sin que sea preciso dividir previamente, si cargamos en la pila (o en editor de ecuaciones) la expresión



y ejecutamos el comando PARTFRAC, obtenemos directamente

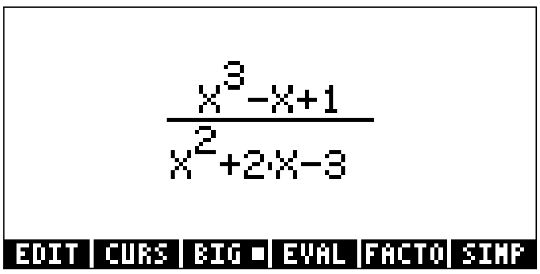


Actividad 2.10 *El objetivo de esta actividad es calcular, paso a paso, una integral racional. Supongamos que tenemos que calcular la primitiva*

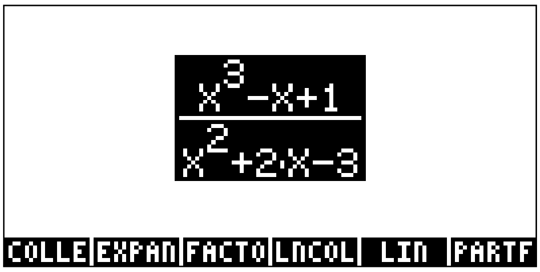
$$\int \frac{x^3-x+1}{x^2+2x-3}\,dx.$$

Para ello,

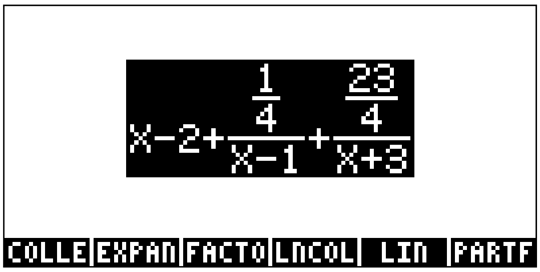
1. *Entra en el editor de ecuaciones la función racional.*



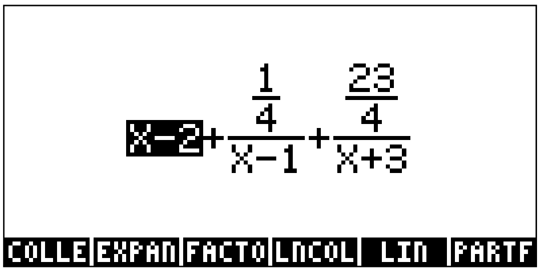
2. *Selecciona la expresión y accede al menú* ALG.



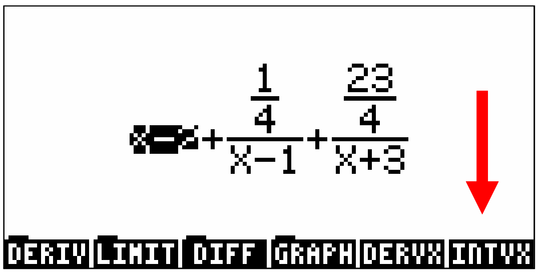
3. *Pulsa* [F6] *para ejecutar* PARTFRAC *y realizar la descomposición en fracciones simples.*



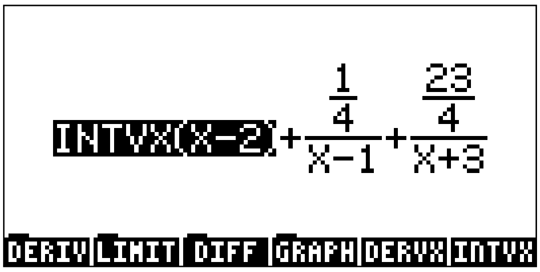
4. *Ahora, vamos a integrar cada uno de los términos por separado. Usa la combinación de teclas* ↱ [▶] *para seleccionar el polinomio inicial.*



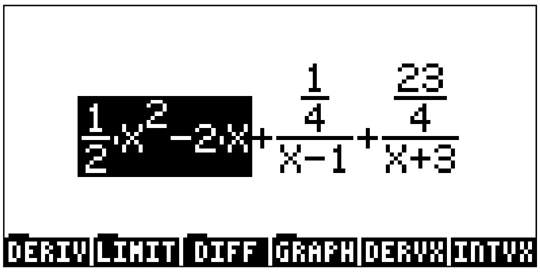
5. *Pulsa* ↰[4] *para acceder al menú* CALC *y pulsa* [F6] *para ejecutar el comando* INTVX, *que calcula la primitiva respecto de la variable por omisión*



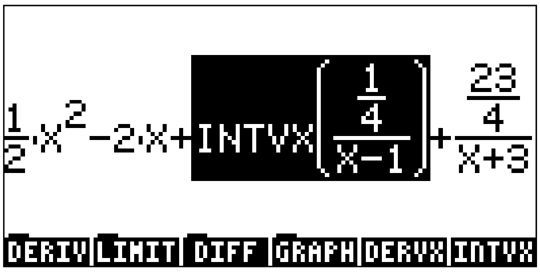
obtendrás:



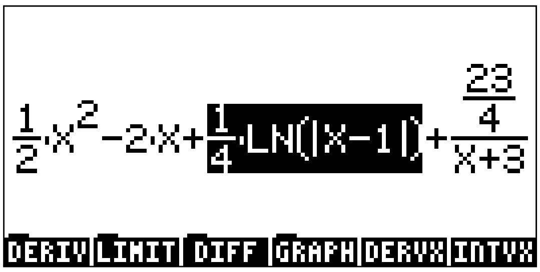
Ejecuta EVAL *para realizar la integración.*



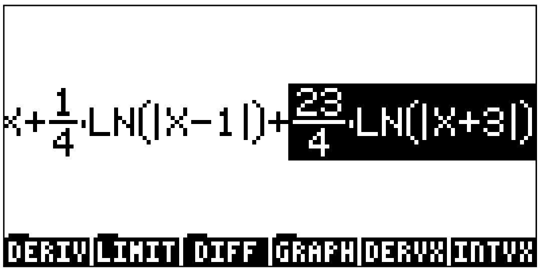
6. *Selecciona ahora la primera fracción y pulsa* INTVX,



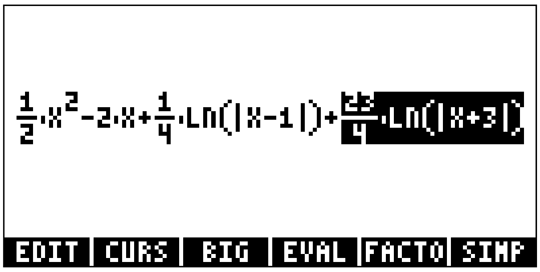
ejecuta EVAL, *para efectuar la integración.*



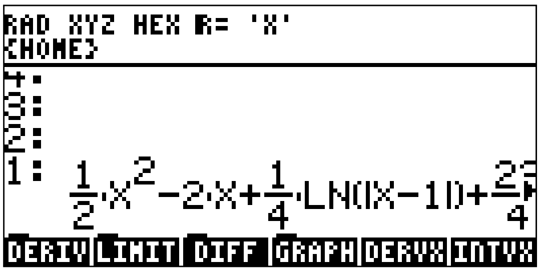
7. *Finalmente, repite el proceso con la segunda fracción, resulta:*



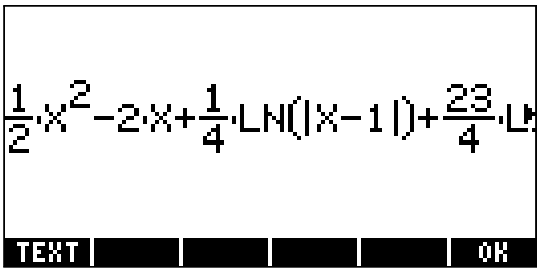
8. *Pulsa* [TOOL] *para recuperar el menú de herramientas del editor de ecuaciones y pulsa* [F3] *para desactivar la opción* [BIG], *entonces obtendrás la siguiente vista:*



9. *Si pulsas* [ENTER], *cargarás la expresión en la pila.*



10. *Para visualizar la expresión desde la pila, pulsa* [TOOL] *y* [VIEW], *accederás a una pantalla gráfica*



que puedes desplazar con las teclas [◄],[►].

Actividad 2.11 *Calcula manualmente la integral*

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}\, dx.$$

Actividad 2.12 *Calcula directamente la integral*

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}\, dx,$$

cargando la expresión

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 2x - 3}$$

en la pila y ejecutando el comando INTVX*.*

Actividad 2.13 *Calcula manualmente la integral*

$$\int \frac{x + 1}{x^2 - 6x + 8}\, dx.$$

Verifica el resultado integrando con INTVX*.*
Sol. $\int \frac{x+1}{x^2-6x+8}\, dx = -\frac{3}{2}\ln(x-2) + \frac{5}{2}\ln(x-4)$.

Actividad 2.14 *Descompón en fracciones simples la función racional*

$$\frac{x + 1}{x^2 - 6x + 8}$$

e integra cada una de los términos por separado.

3 Solve

El comando SOLVE permite resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones de forma exacta. También resuelve inecuaciones. Puedes acceder al comando SOLVE en la segunda página del menú ALG

también puedes obtenerlo del catálogo de funciones y comandos[2] [CAT]

[2] También puedes encotrar el comando SOLVE en la primera página del menú S.SLV (↰ [1]).

o teclearlo directamente.

Actividad 3.1 *Localiza el comando* SOLVE *en el menú* ALG.

Actividad 3.2 *Localiza el comando* SOLVE *en el catálogo de funciones.*

Actividad 3.3 *Localiza el comando* SOLVE *en el menú* S.SLV.

3.1 Resolución de ecuaciones

Para resolver una ecuación con SOLVE, simplemente debes cargar la ecuación en el segundo nivel de la pila, la incógnita en el primer nivel y ejecutar SOLVE.

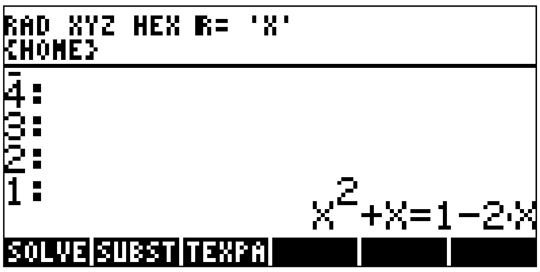
Actividad 3.4 *Por ejemplo, para resolver la ecuación*

$$x^2 + x = 1 - 2x,$$

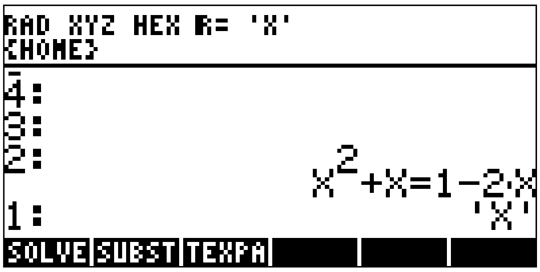
procedemos como sigue:

1. *Cargamos en la pila los dos miembros de la ecuación.*

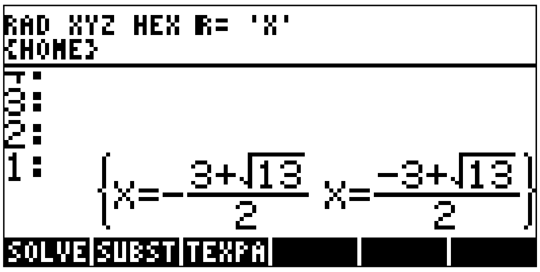
2. *Pulsamos la tecla* ↱(6,2) *para ejecutar el comando* =, *obtenemos:*



3. *Cargamos en la pila la incógnita*



y ejecutamos el comando SOLVE, *debes obtener*



Actividad 3.5 *Resuelve la ecuación* $x^2 - x - 1 = 0$.
Sol. $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$.

Actividad 3.6 *Si la calculadora no puede resolver una ecuación, contesta con una lista vacía de soluciones. Selecciona el modo real exacto y intenta resolver la ecuación* $x^2 + x + 1 = 0$.

Debes obtener el resultado

Actividad 3.7 *Selecciona ahora el modo complejo exacto y vuelve a resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$, debes obtener el siguiente resultado:*

Resuelve manualmente la ecuación y verifica el resultado obtenido.

Actividad 3.8 *Fija el modo real exacto e intenta resolver la ecuación bicuadrada $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.*
Sol. $x = 1, x = -1$.

Actividad 3.9 *Fija el modo complejo exacto e intenta resolver la ecuación bicuadrada $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.*
Sol $x = 1, x = -1, x = 2i, x = -2i$.

Actividad 3.10 *Fija el modo complejo exacto e intenta resolver la ecuación bicuadrada $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.*
Sol $x = 1, x = -1$.

Actividad 3.11 *Resuelve manualmente la ecuación $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.*

3.2 Resolución de sistemas no lineales

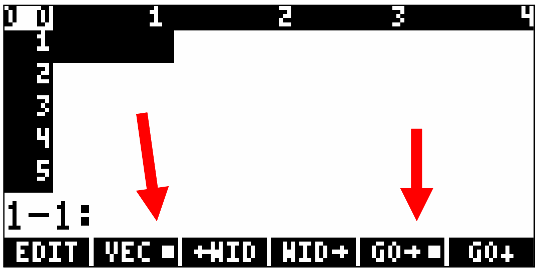
El comando SOLVE permite resolver sistemas no lineales como

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$$

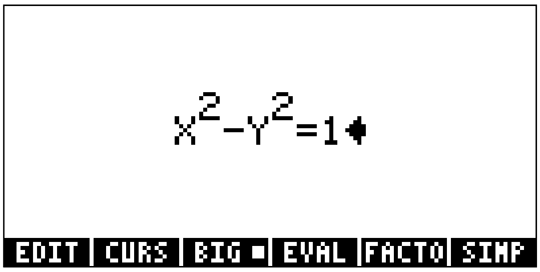
Para ello debemos cargar un vector con las ecuaciones en el nivel 2 de la pila, un vector con las incógnitas en el nivel 1, y ejecutar SOLVE. La parte más novedosa es la construcción del vector que contiene las ecuaciones. Procedemos como sigue:

1. Accedemos al editor de Matrices[3] [MTRW], verificamos que la opción VEC está activada[4]; en caso contrario, pulsamos [F2] para activarla. Verificamos también que esté activada la opción de desplazamiento a la derecha [GO→].

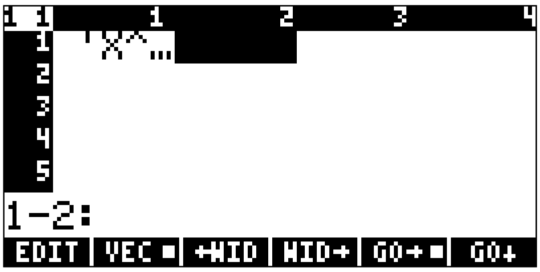
[3] Tecla ↰(4,3).
[4] Debe aparecer un cuadrado blanco junto a VEC, tal como aparece en la figura.



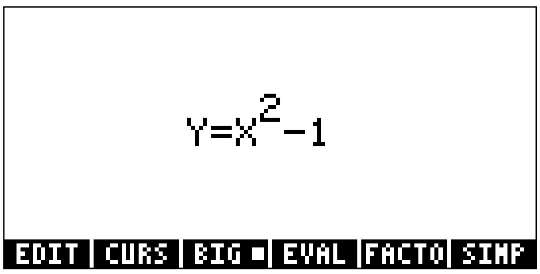
2. Pulsamos [EQW] para acceder al editor de ecuaciones y escribimos la primera ecuación.



Pulsamos [ENTER] para aceptar la ecuación y volver al editor de matrices.

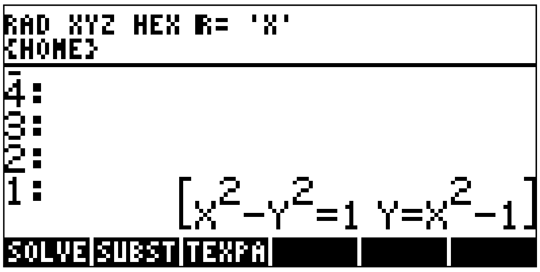


3. Observamos que se ha seleccionado automáticamente el campo 1-2. Pulsamos nuevamente [EQW] para acceder al editor de ecuaciones y entrar la segunda ecuación.



Pulsamos [ENTER] para aceptar la segunda ecuación y volver al editor de matrices.

Pulsamos ENTER para aceptar el vector de ecuaciones y volver a la pila, debes obtener

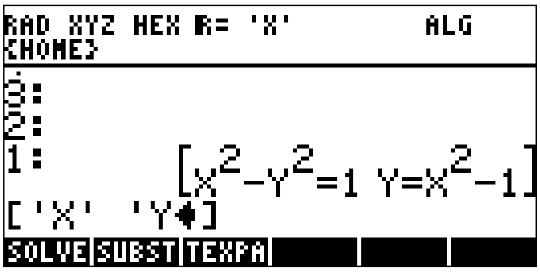


4. Para escribir el vector de incógnitas, vamos a emplear la línea de edición. Pulsamos ↰[×] para entrar los claudátors.

5. Pulsamos la tecla de comilla simple[5], para pasar a modo algebraico y entramos la variable x,

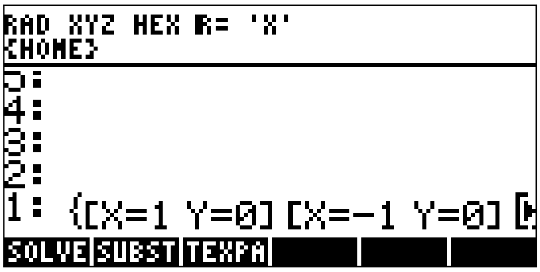
[5] Tecla (4,3) en la HP49g+ y HP48gII; en la HP49g es la tecla ↱(4,3).

nos desplazamos fuera de las comillas y repetimos el proceso para entrar la variable y.

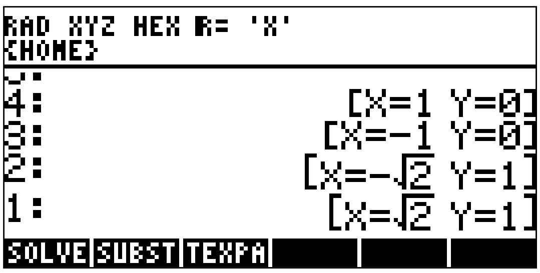


6. Pulsamos ENTER para aceptar el vector de incógnitas, la pila debe presentar el siguiente aspecto

7. Ejecutamos el comando SOLVE y obtenemos la lista de soluciones.



8. Ejecutamos EVAL para romper la lista de soluciones.



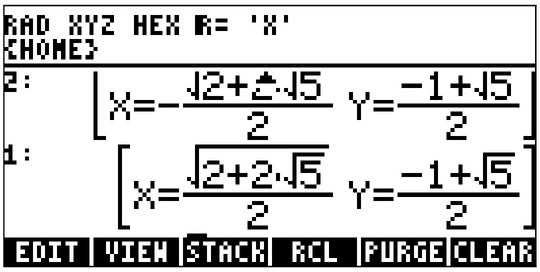
Actividad 3.12 *Resuelve manualmente el sistema*

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$$

Actividad 3.13 *Resuelve el sistema*

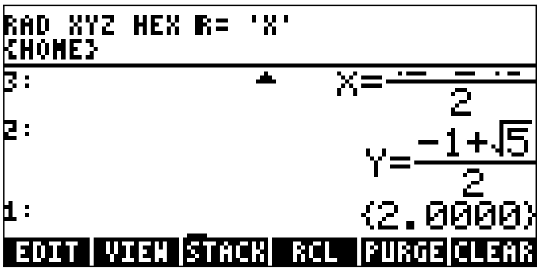
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^2 - 1. \end{cases}$$

Obtendrás las soluciones:

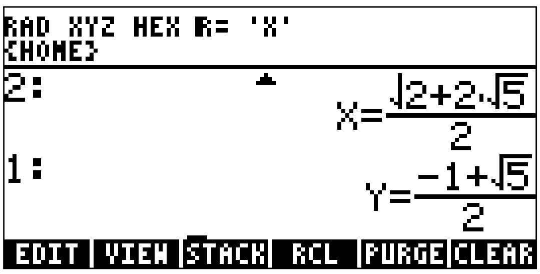


Si intentas obtener una aproximación decimal de la solución con → NUM *verás que no funciona. Para evaluar numéricamente las soluciones, puedes proceder como sigue:*

1. *Primero usa el comando*[6] OBJ→ *para romper el vector.*

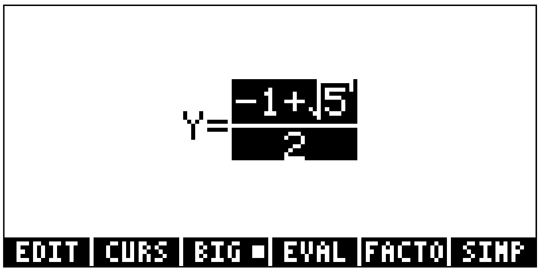


2. *Borra el contenido del nivel 1 de la pila.*



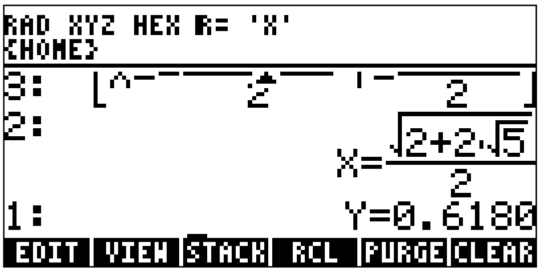
[6] Puedes encotrarlo en [PRG][TYPE] o en el catálogo de funciones CAT.

3. *Pulsa* [▼] *para acceder al editor de ecuaciones y selecciona la parte numérica.*

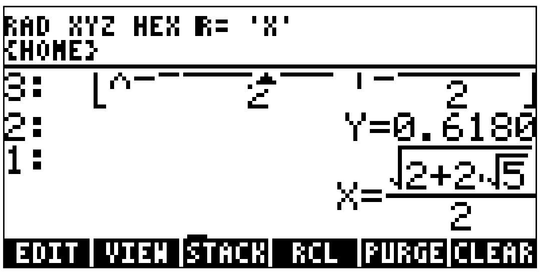


4. *Ahora ejecuta* → NUM *para evaluar numéricamente la expresión.*

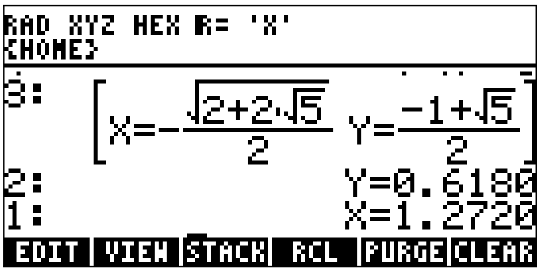
5. *Pulsa* ENTER *para volver a la pila.*



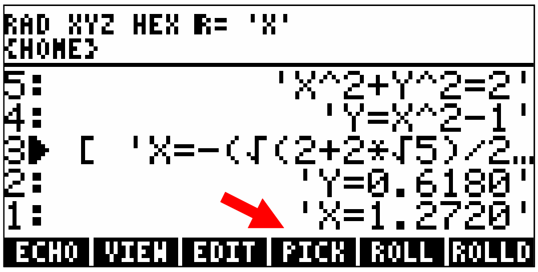
6. *Pulsa* [▶] *para ejecutar* SWAP *e intercambiar el contenido del nivel 1 y del nivel 2 de la pila.*



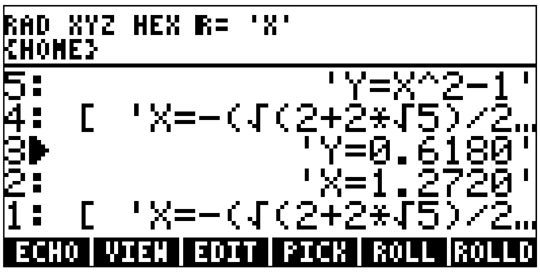
7. *Repite el procedimiento con la x del nivel 1, esto es, accede al editor de ecuaciones y selecciona la parte numérica y ejecuta →NUM, después de pulsar ENTER para volver a la pila, obtendrás*



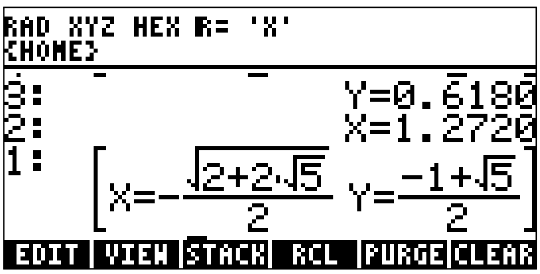
8. *Pulsa* [HIST] *para acceder al editor de pila, desplaza el cursor de pila al nivel 3 y toma una copia del segundo vector de soluciones con PICK,*



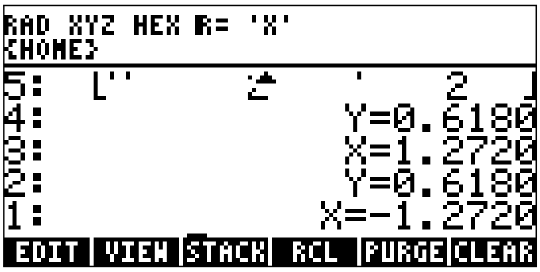
obtendrás una copia del contenido del nivel 3 en el nivel 1 de la pila



pulsa [ENTER] *para salir del editor de pila.*



9. *Repite el procedimiento anterior, rompe el vector con el comando OBJ→ y calcula aproximaciones numéricas en el editor de ecuaciones. Finalmente resulta*



3.3 Resolución de inecuaciones

3.3.1 Resolución gráfica

Consideremos una inecuación de la forma

$$f(x) < 0.$$

Si representamos la curva

$$y = f(x),$$

la solución de la inecuación es el conjunto de valores x para los que la gráfica está por debajo del eje OX.

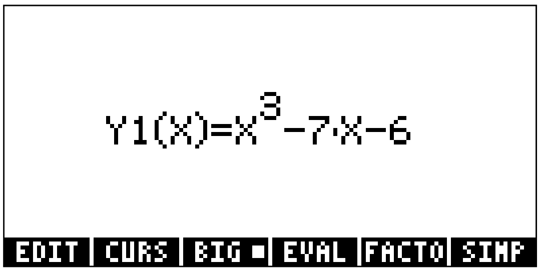
Actividad 3.14 *Vamos a resolver gráficamente la inecuación*

$$x^3 - 7x - 6 < 0.$$

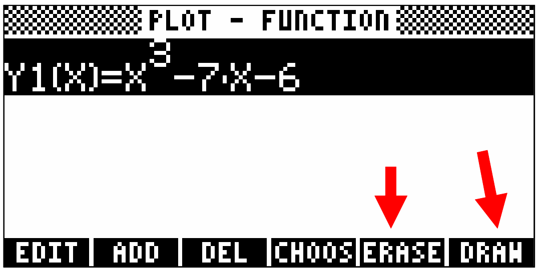
1. *Accedemos al entorno gráfico*[7] *con* $\boxed{\Lsh\,[F1]}$.

y entramos la función $f(x) = x^3 - 7x - 6$.

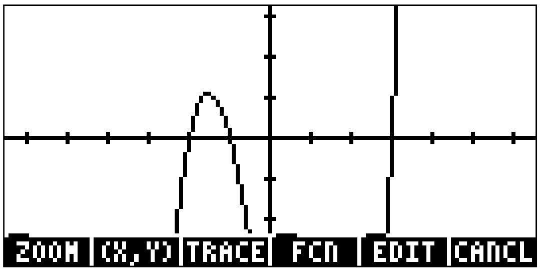
[7] Recuerda que la notación $\boxed{\Lsh\,[F1]}$ indica que debes pulsar $[F1]$ mientras mantienes pulsada la tecla de cambio izquierdo $[\Lsh]$.



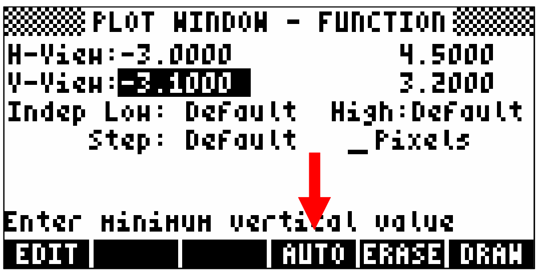
Pulsamos [ENTER] *para aceptar la función*



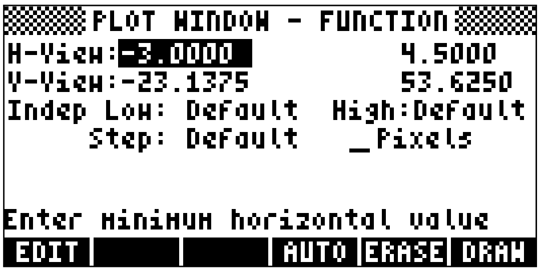
y [F5], [F6] *para ejecutar* ERASE *y* DRAW, *obtenemos:*



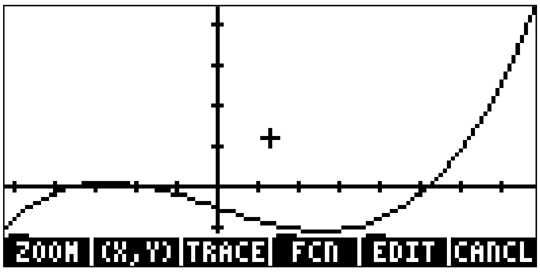
2. *Pulsamos* [CANCEL], *para salir de la pantalla gráfica; a continuación, pulsamos* ↰ [*F*2] *para acceder al formulario* PLOT WINDOW *que permite ajustar el intervalo de representación. Fijamos el intervalo horizontal en* $[-3, 4.5]$



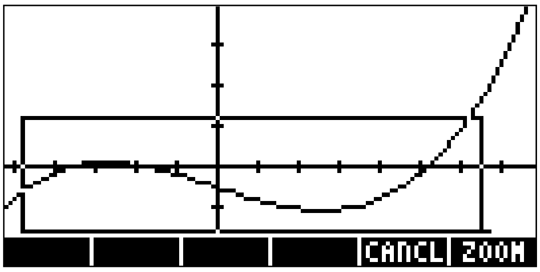
y usamos AUTO *para fijar el intervalo vertical, obtenemos*



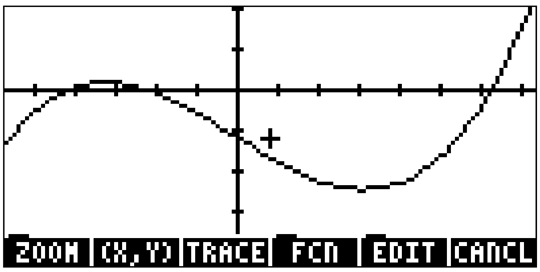
Pulsamos [$F5$], [$F6$] *para ejecutar* ERASE *y* DRAW, *resulta*



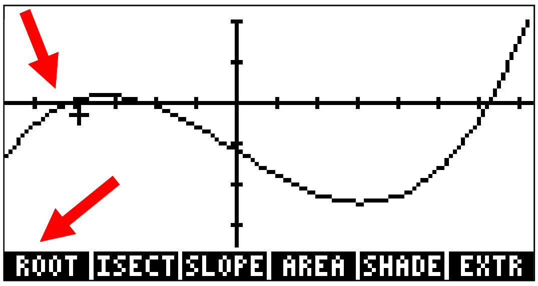
3. *Vemos que aún no hemos obtenido una buena vista de la zona de interés, pulsamos* [ZOOM] *y usamos* BOXZOOM *para seleccionar la zona de interés,*



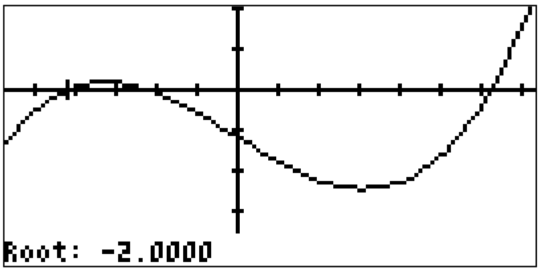
obtenemos



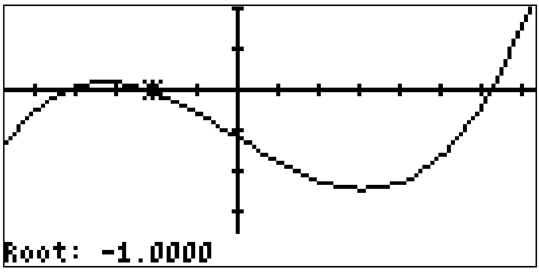
4. *Para determinar los cortes con el eje* OX, *pulsamos* [$F4$] *para acceder al menú* [FCN], *posicionamos el cursor cerca de la raíz a calcular*



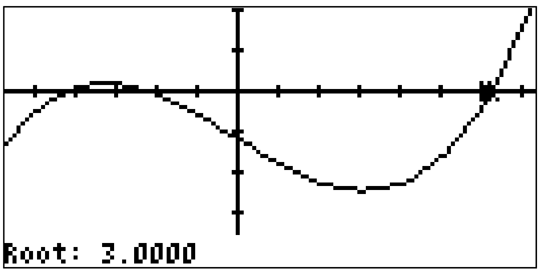
y usamos el comando ROOT, *obtenemos*



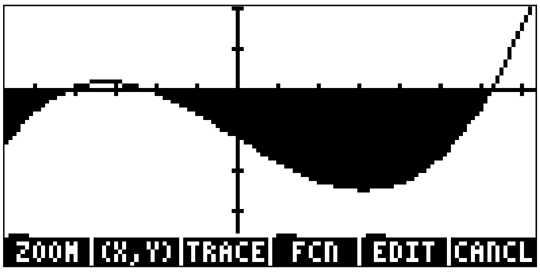
Pulsamos [+] *para recuperar el menú* [FCN] *y repetimos el procedimiento para las otras dos raíces, resulta*



y



5. *La zona bajo la curva es*



por lo tanto, la solución de la inecuación

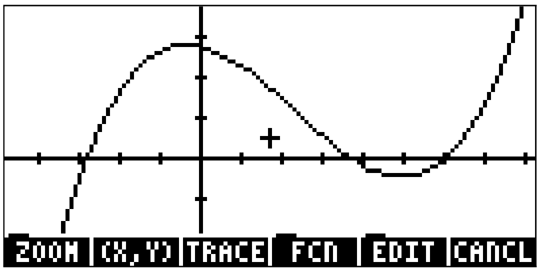
$$x^3 - 7x - 6 < 0$$

es $(-\infty, -2) \cup (-1, 3)$.

Actividad 3.15 *Resuelve gráficamente la desigualdad*

$$x^3 - 4.4x^2 - 2.04x + 16.416 > 0$$

Sol. Se obtiene el gráfico



la solución es $(-1.8, 2.4) \cup (3.8, +\infty)$.

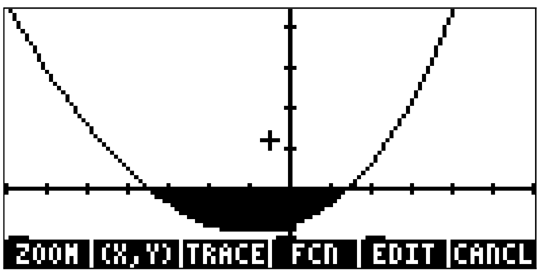
Actividad 3.16 *Resuelve la inecuación*

$$e^x \leq 2 - x^2.$$

Sol. Escribimos la inecuación en la forma

$$e^x + x^2 - 2 \leq 0.$$

Se obtiene el gráfico



la solución es $(-1.316, 0.5373)$.

En la solución de la actividad anterior, he usado el comando SHADE del menú [FCN] para resaltar la zona de interés. Obviamente, no es necesario sombrear el área bajo el eje OX para resolver el problema.

3.3.2 Resolución numérica basada en intervalos de signo constante

Consideremos una inecuación de la forma

$$f(x) < 0.$$

Como consecuencia del *Teorema de Bolzano*, sabemos que una función $f(x)$ sólo puede cambiar de signo en los puntos de discontinuidad y en los puntos donde se anula, esto es, si sabemos que *todos los ceros y discontinuidades* de $f(x)$ son

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_n,$$

entonces en los intervalos

$$A_0 = (-\infty, c_1)\,,\ A_1 = (c_1, c_2), \ldots,\ A_{n-1} = (c_{n-1}, c_n)\,,\ A_n = (c_n, +\infty)\,,$$

la función $f(x)$ tiene signo constante y basta con tomar un valor de prueba en cada intervalo $x_j^* \in A_j$ y calcular $f(x_j^*)$ para determinar el signo de la función en el intervalo[8]. La solución de la inecuación

$$f(x) < 0$$

estará formada por la unión de aquellos intervalos A_j donde $f(x)$ es negativa[9].

Actividad 3.17 *En esta actividad vamos a resolver la inecuación*

$$x^2 - x < 2 - 2x$$

siguiendo el procedimiento descrito. Previamente, escribimos la inecuación en la forma

$$x^2 + x - 2 < 0$$

e identificamos la función

$$f(x) = x^2 + x - 2.$$

[8]Es importante observar que el método descrito sólo es válido si la lista de ceros y discontinuidades está completa, es decir, si disponemos de **todos** los ceros y discontinuidades de $f(x)$,

[9]Obviamente, el procemiento es aplicable a inecuaciones del tipo $f(x) > 0$. Para inecuaciones del tipo $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 0$, debemos inculir en la solución los puntos c_j que son ceros de $f(x)$.

1. *Determinamos los puntos de discontinuidad de la función $f(x)$. Como se trata de un polinomio, no hay puntos de discontinuidad.*

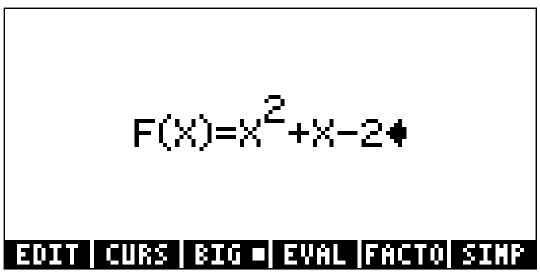
2. *Determinamos los ceros de la función $f(x)$. Para ello, podemos usar el comando* SOLVE

obtenemos

3. *La lista completa de ceros y discontinuidades es $c_1 = -2,\ c_2 = 1$. Los intervalos de signo constante son*

$$A_0 = (-\infty, -2)\,,\ A_1 = (-2, 1)\,,\ A_2 = (1, +\infty)\,.$$

4. *Definimos la función $f(x) = x^2 + x - 2$. Para ello, accedemos al editor de ecuaciones y entramos la expresión*

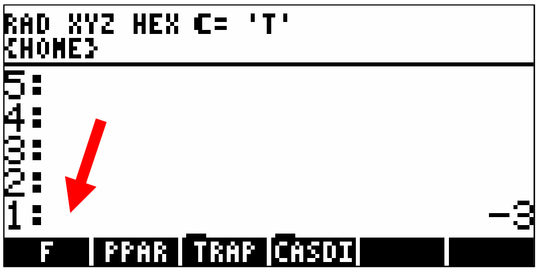


pulsamos [ENTER] *para cargar la expresión en la pila y ejecutamos el comando* DEFINE.

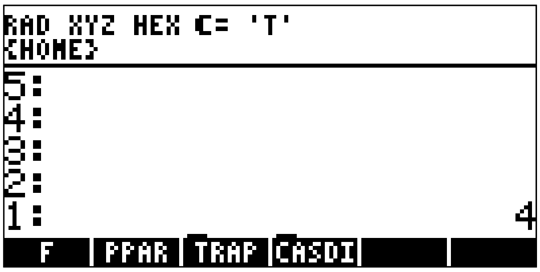
5. *Completamos las siguiente tabla*

A_j	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
x_j^*	-3	0	2
$f(x_j)$			
signo			

para ello, pulsamos [VAR] *para acceder al área de variables y usamos la tecla con etiqueta* [F] *para calcular los valores* $f(x_j^*)$. *Para* x_1^*, *cargamos* -3 *en la pila*



y obtenemos



La tabla completa es la siguiente

A_j	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,+\infty)$
x_j^*	-3	0	2
$f(x_j)$	4	-2	4
signo	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

6. *La solución es, por lo tanto, el intervalo* $(-2,1)$.

Actividad 3.18 *Resuelve la inecuación*

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} \leq 0$$

determinando los intervalos de signo constante de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}.$$

Sol. *$f(x)$ tiene ceros en $x = 2$ y $x = 3$, y discontinuidades es $x = \pm 1$. Se obtiene la tabla*

A_j	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, +\infty)$
x_j^*	-2	0	1.5	2.5	3
$f(x_j)$	6.67	-6.0	0.6	-0.045	0.1333
signo	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$

La solución es $(-1, 1) \cup [2, 3]$.

Actividad 3.19 *Intenta resolver gráficamente la inecuación*

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} \leq 0.$$

Verás que no es posible obtener una buena representación en un único gráfico.

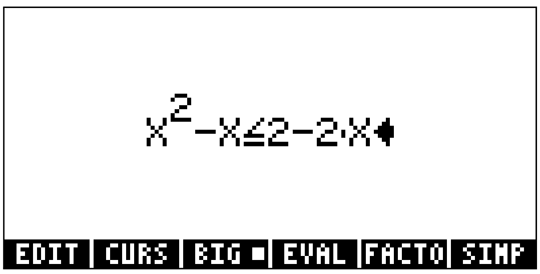
3.3.3 Resolución con el comando SOLVE

El comando SOLVE también puede resolver inecuaciones. Es conveniente fijar el modo exacto para un buen funcionamiento de SOLVE.

Actividad 3.20 *Consideremos, por ejemplo, la inecuación*

$$x^2 - x \leq 2 - 2x.$$

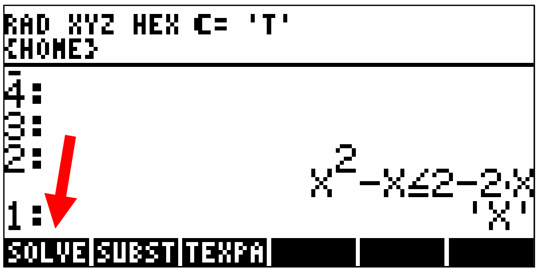
1. *Accedemos al editor de ecuaciones* [EQW] *y escribimos la inecuación*



observa que los signos de desigualdad están disponibles en el teclado.

Pulsamos [ENTER] *para cargar la inecuación en la pila.*

2. *Cargamos la incógnita en el nivel 1 de la pila y accedemos a la segunda página del menú* [ALG] *para ejecutar* SOLVE



obtenemos

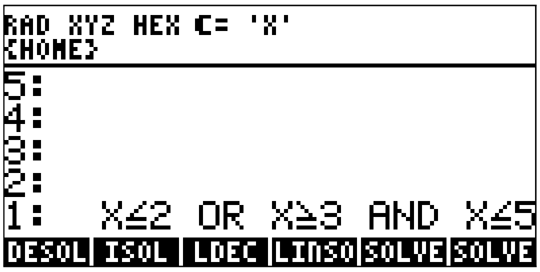
es decir, la solución es el intervalo cerrado $[-2, 1]$.

Actividad 3.21 *Resuelve la inecuación*

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 \leq 0.$$

Sol. $(-\infty, 2] \cup [3, 5]$.

En la actividad anterior, la solución de la calculadora es



que debemos interpretar como $(-\infty, 2] \cup [3, 5]$. Para interpretar la respuesta de la calculadora, debemos dar prioridad al operador AND sobre el operador OR. Es decir, interpretamos

$$x \leq 2 \quad \text{OR} \quad x \geq 3 \quad \text{AND} \quad x \leq 5$$

como

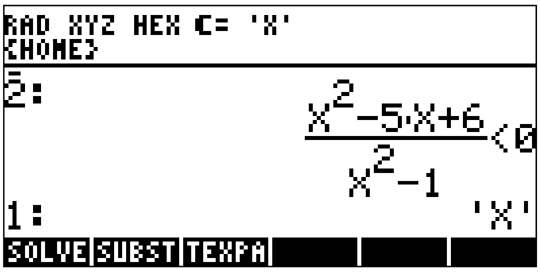
$$(x \leq 2) \quad \text{OR} \quad (x \geq 3 \quad \text{AND} \quad x \leq 5)\,.$$

El comando SOLVE también actúa en inecuaciones con cocientes de polinomios, pero debemos tener cuidado con los puntos de discontinuidad, pues el comando puede producir resultados incorrectos para esos puntos. La siguientes actividades ilustran este problema.

Actividad 3.22 *Queremos resolver la inecuación*

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} < 0$$

1. *Accede al editor de ecuaciones, escribe la inecuación y la cárgala en la pila.*
2. *Entra la incógnita en el nivel* 1 *de la pila*



Ejecuta el comando SOLVE*, obtendrás*

3. Pulsa [TOOL] [VIEW] [TEXT], *obtendrás*

Teniendo en cuenta la prioridad de AND *sobre* OR, *la solución es* $(-1,1) \cup (2,3)$.

Actividad 3.23 *Queremos ahora resolver la inecuación*

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-1} \le 0$$

sigue el mismo procedimiento que en la actividad anterior. Obtendrás

En este caso, la solución proporcionada por la calculadora es $[-1,1] \cup [1,2]$, *mientras que la solución correcta es* $(-1,1) \cup [1,2]$, *pues* $x = \pm 1$ *son puntos de discontinuidad de*

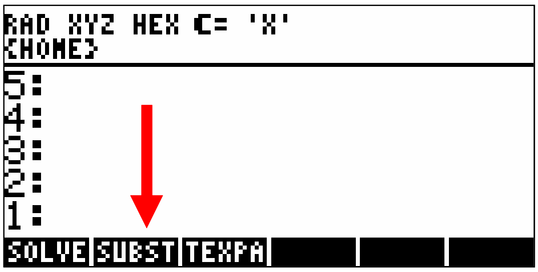
$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-1}$$

y en ellos no existe $f(x)$.

4 Sustitución

4.1 El comando SUBST

El comando SUBST permite sustituir valores y realizar sustituciones algebraicas. Puedes acceder al comando SUBST en la segunda página del menú [ALG]



o en el catálogo de funciones y comandos [CAT].

También puedes teclearlo directamente.

Actividad 4.1 *Localiza el comando* SUBST *en la segunda página del menú* [ALG].

Actividad 4.2 *Localiza el comando* SUBST *en el catálogo de funciones y comandos.*

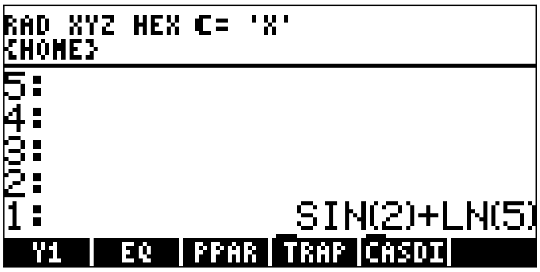
4.1.1 Sustitución de un valor

Actividad 4.3 *En esta actividad vamos a substituir el valor* $x = 2$ *en la expresión* $\sin x + \ln(x^2 + 1)$.

1. *Fija la calculadora en modo exacto.*
2. *Carga la expresión en la pila.*
3. *Carga en el nivel 1 de la pila la igualdad* $x = 2$, *y ejecuta el comando* SUBST,

debes obtener

4. *Observa que se ha realizado la sustitución, pulsa* EVAL *para realizar las operaciones pendientes, resulta*



5. *Para obtener el valor numérico, pulsa* →NUM.

Actividad 4.4 *Fija el modo angular en radianes, el modo real exacto y el formato numérico* FIX 5. *Construye en la pila la expresión*

$$\sin(x) + \frac{\cos(x)}{\tan(x)+1},$$

y sustituye el valor $x = 2 + \ln 3$. *Calcula una aproximación decimal del resultado. Realiza todo la actividad sin usar el editor de ecuaciones.*
Sol. -1.0010.

4.1.2 Sustitución de una variable

El comando SUBST también permite substituir una variable por una expresión algebraica.

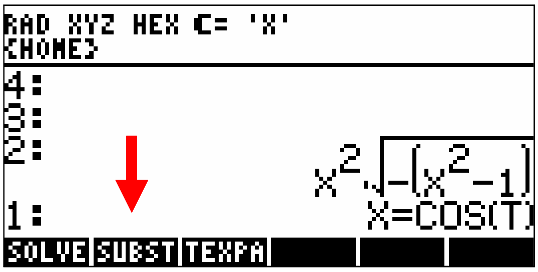
Actividad 4.5 *Tenemos la expresión*

$$x^2\sqrt{1-x^2},$$

y queremos sustituir $x = \cos t$.

1. *Entra en la pila la expresión* $x^2\sqrt{1-x^2}$.

2. *Carga en la pila la ecuación* $x = \cos t$ *y ejecuta* SUBST



obtendrás

4.1.3 Cambio de variable

El comando SUBST permite realizar auténticos cambios de variable.

Actividad 4.6 *Por ejemplo, supongamos que tenemos la ecuación bicuadrada*

$$x^4 - x^2 + 3 = 0$$

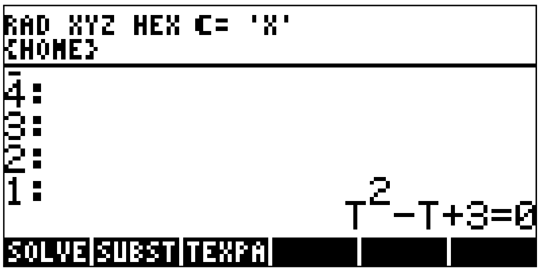
y queremos realizar el cambio $x^2 = t$*. Esto se puede hacer con SUBST. Procede como sigue:*

1. *Carga en la pila* $x^4 - x^2 + 3 = 0$.

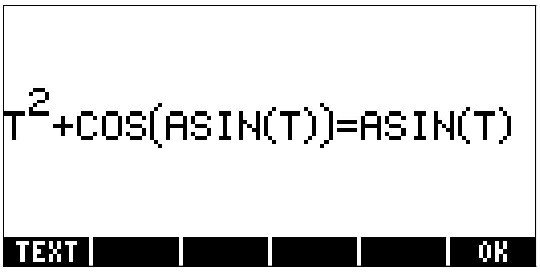
2. *Carga en la pila* $x^2 = t$ *y ejecuta* SUBST,

obtendrás

pulsa EVAL *y resulta*



Actividad 4.7 *Realiza el cambio de variable* $\sin x = t$ *en la expresión* $(\sin(x))^2 + \cos(x) = x$.
Sol. Debes obtener



4.1.4 Cambio de variable en integrales definidas

Supongamos que queremos calcular la integral definida

$$I = \int_1^3 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Realizamos el cambio

$$\sqrt{x} = t$$

de donde resulta

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x}\, dt.$$

Los nuevos límites de integración son

$$\begin{aligned} t(1) &= 1, \\ t(3) &= \sqrt{3}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$I = \int_1^3 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^{\sqrt{3}} 2e^t dt = 2\left[e^t\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(e^{\sqrt{3}} - e\right).$$

Es bastante sorprendente[10] que el comando SUBST permita realizar el cambio de variable en integrales definidas.

Actividad 4.8 *Vamos a realizar el cambio de variable* $\sqrt{x} = t$ *en la integral*

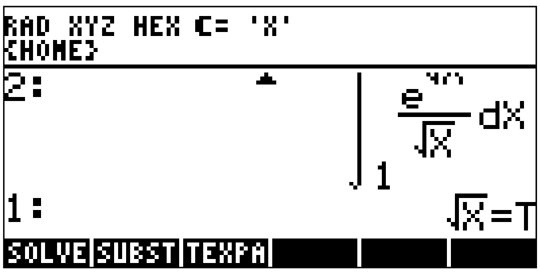
$$I = \int_1^3 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

1. *Accede al editor de ecuaciones y escribe la integral*

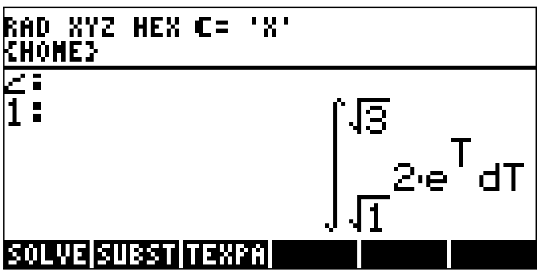
$$\int_1^3 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

   Pulsa ENTER *para cargarla en la pila.*

2. *Carga el cambio de variable* $\sqrt{x} = t$ *en la pila*



   y ejecuta el comando SUBST, *debes obtener*



[10] Al menos a mí me ha sorprendido.

observa que se ha realizado correctamente el cambio de variable.

3. *Para calcular el valor de la integral, pulsa* EVAL, *obtendrás*

Actividad 4.9 *Resuelve manualmente la integral*

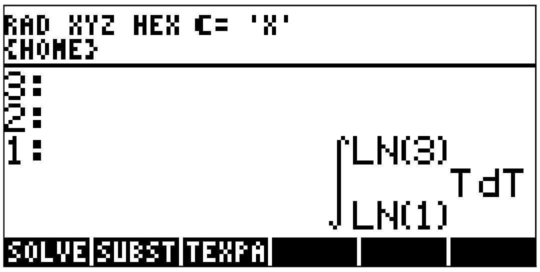
$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

realizando el cambio de variable $\ln x = t$.
Sol. $\frac{1}{2}(\ln 3)^2 = 0.60347$

Actividad 4.10 *Usando el comando* SUBST, *realiza el cambio de variable* $\ln x = t$ *en la integral*

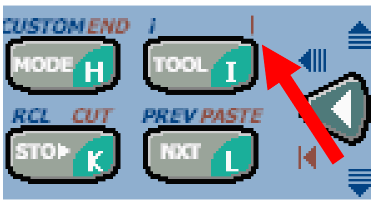
$$\int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$$

Calcula el valor exacto y una evaluación decimal con 5 *decimales.*
Sol. Después del cambio, debes obtener



4.2 El comando |

Otra forma de realizar sustituciones es el comando |. Puedes acceder al comando | directamente desde el teclado pulsando ↱ [TOOL].



El comando | es menos potente que SUBST, no admite sustituciones *implícitas* del tipo, por ejemplo, $x^2 = t$.

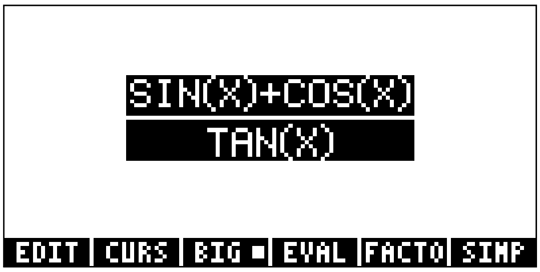
4.2.1 Sustitución en el editor de ecuaciones

Actividad 4.11 *Queremos sustituir el valor $x = 3$ en la expresión*

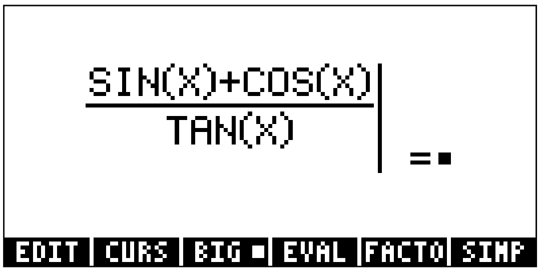
$$\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\tan(x)}.$$

1. *Escribe la expresión en la pila*[11]

2. *Pulsa* [▼] *para cargar la ecuación en el editor de ecuaciones.*

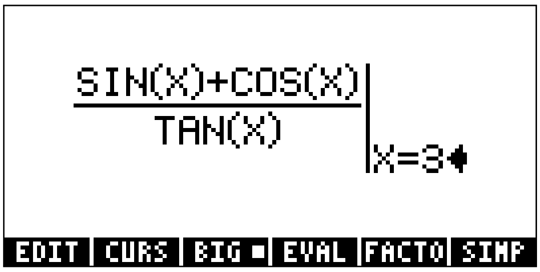


3. *Pulsa* ↱ [TOOL] *para entrar el comando* |.

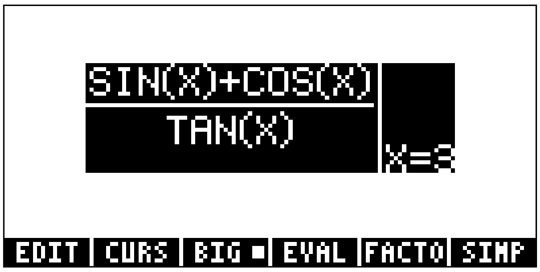


4. *Escribe* $x = 3$.

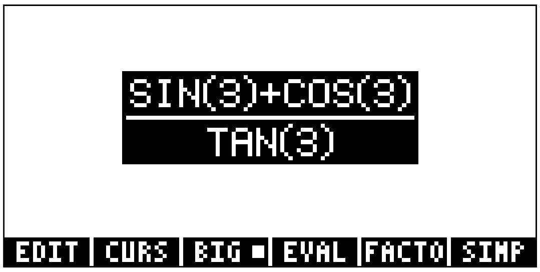
[11] Si lo deseas, puedes escribirla directamente en el editor de ecuaciones, pero es más rápido en la pila.



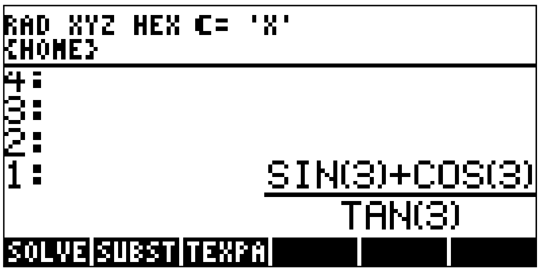
5. *Selecciona toda la expresión.*



6. *Y ejecuta* EVAL, *obtendrás*



7. *Si pulsas* ENTER, *el resultado se carga en la pila.*



Actividad 4.12 *Sustituye $x = 2$ en la expresión*

$$\frac{\sqrt{x} + \ln(x)}{\tan(x)}.$$

Calcula una aproximación decimal.
Sol. -0.96445

Actividad 4.13 *Queremos calcular la integral definida*

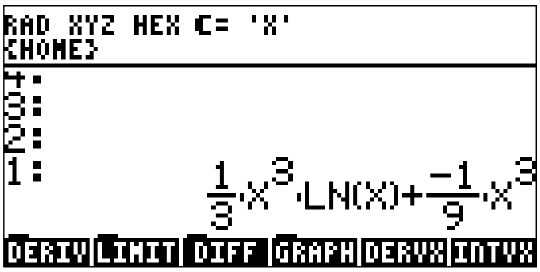
$$\int_1^3 x^2 \ln x \, dx.$$

Procede como sigue.

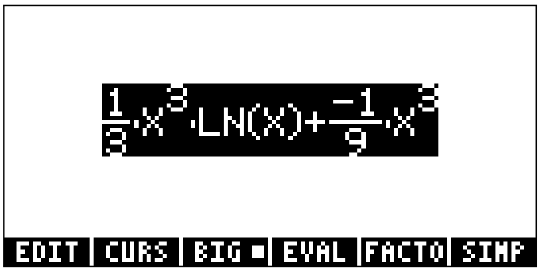
1. *Carga la expresión* $x^2 \ln x$ *en la pila.*
2. *Accede al menú* [CALC]

y ejecuta el comando INTVX

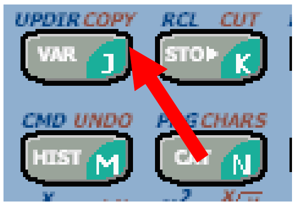
obtendrás la siguiente función primitiva



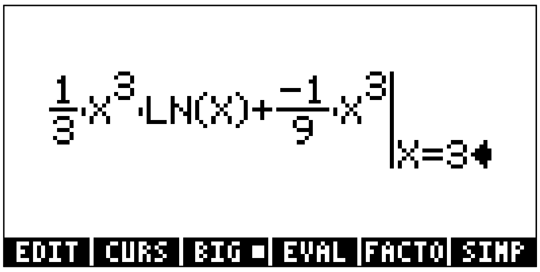
3. *Para calcular el valor de la integral definida usando la regla de Barrow-Newton, hay que evaluar la primitiva en los límites de integración y restar. Pulsa* [▼] *para cargar la primitiva en el editor de ecuaciones*



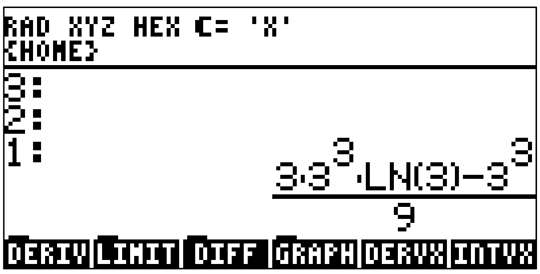
aprovecha que la tienes seleccionada para copiarla pulsando [COPY].



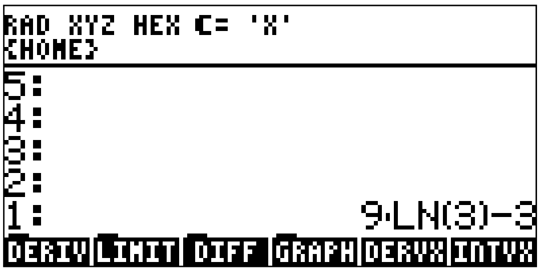
4. Ejecuta el comando | *y evalúa la primitiva en* $x = 3$



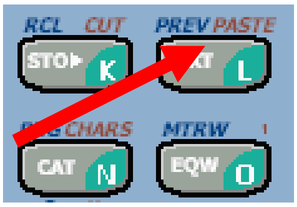
pulsa ENTER *para cargar la expresión en la pila y pulsa* EVAL *para evaluarla, obtendrás*



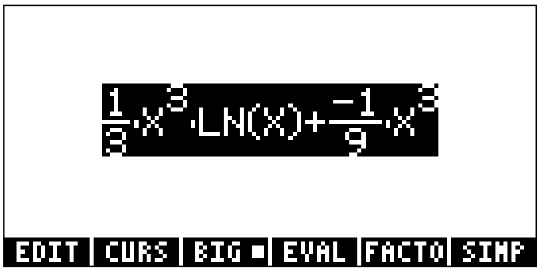
pulsa nuevamente EVAL, *resulta*



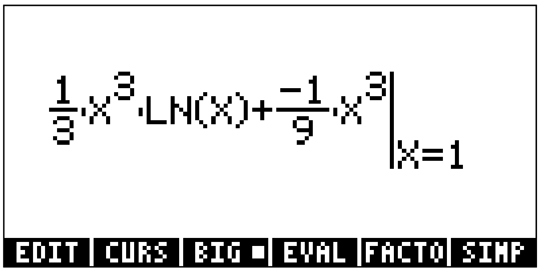
5. *Pulsa* [EQW] *para acceder al editor de ecuaciones y pulsa* [PASTE]



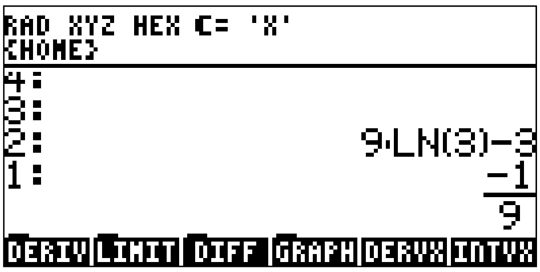
para recuperar la primitiva, obtendrás



6. *Repite el procedimiento anterior hasta obtener*

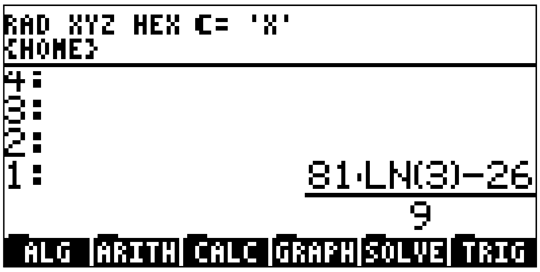


7. *Pulsa* [ENTER] *y dos veces* [EVAL], *obtendrás*

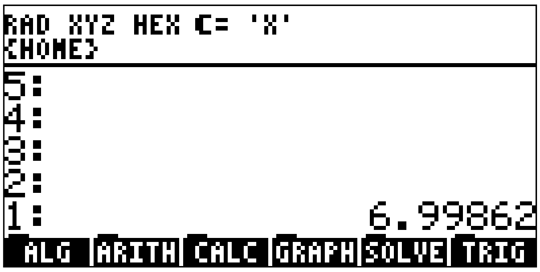


8. Finalmente, pulsa $[-]$ *para restar los dos valores, resulta*

pulsando EVAL, *se obtiene*



pulsando $\rightarrow$ NUM, *resulta la aproximación numérica.*



Actividad 4.14 *Calcula manualmente la integral*

$$\int_1^3 x^2 \ln x \, dx.$$

La primitiva se calcula por partes.

Actividad 4.15 *Calcula la integral*

$$\int_1^3 x^2 \ln x \, dx.$$

Escribiéndola directamente en el editor de ecuaciones y usando EVAL.