

Cálculo científico y técnico con
HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 3: **Aplicaciones**
Tema 3.1 **Resolución aproximada de
ecuaciones: Método de Newton-Raphson**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Abril 2008, versión 1.3

1 Introducción

El método de Newton-Raphson es un método iterativo que nos permite aproximar la solución de una ecuación del tipo $f(x) = 0$.

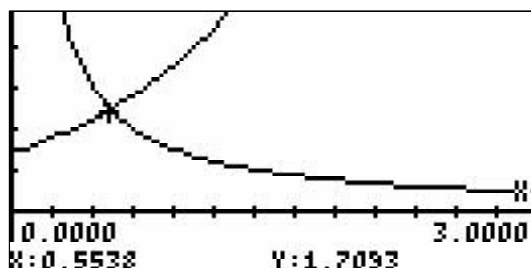
Partimos de una estimación inicial de la solución x_0 y construimos una sucesión de aproximaciones de forma recurrente mediante la fórmula

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f(x_j)}{f'(x_j)}.$$

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$e^x = \frac{1}{x}.$$

En este caso es imposible despejar la incógnita, no obstante, si representamos las curvas $y = e^x$, $y = 1/x$ en el intervalo $x \in [0, 4]$, es evidente que la ecuación tiene una solución en este intervalo.



Para aplicar el método de Newton-Raphson, seguimos los siguientes pasos:

1. Expresamos la ecuación en la forma $f(x) = 0$, e identificamos la función f . En el ejemplo es

$$f(x) = e^x - \frac{1}{x}.$$

2. Calculamos la derivada

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

3. Construimos la fórmula de recurrencia

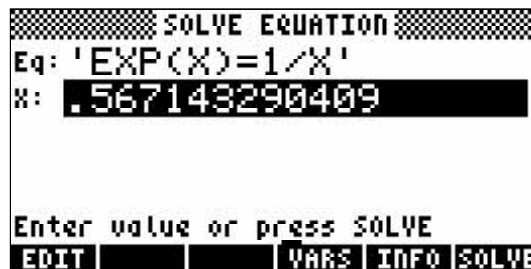
$$x_{j+1} = x_j - \frac{e^{x_j} - \frac{1}{x_j}}{e^{x_j} + \frac{1}{x_j^2}}.$$

4. Tomamos una estimación inicial de la solución. En este caso podemos tomar por ejemplo $x_0 = 1.0$, y calculamos las siguientes aproximaciones. Desde el punto de vista práctico, si deseamos aproximar la solución con 6 decimales, podemos detener los cálculos cuando dos aproximaciones consecutivas coincidan hasta el decimal 8. En nuestro caso, obtendríamos

$$\begin{aligned}x_0 &= 1.0, \\x_1 &= 1 - \frac{e^1 - \frac{1}{1}}{e^1 + \frac{1}{1^2}} = 0.53788284, \\x_2 &= x_1 - \frac{e^{x_1} - \frac{1}{x_1}}{e^{x_1} + \frac{1}{x_1^2}} = 0.56627701, \\x_3 &= 0.56714258, \\x_4 &= 0.56714329, \\x_5 &= 0.56714329.\end{aligned}$$

5. Podemos, entonces, tomar como solución $x = 0.567143$.

Si empleamos la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora¹, resulta



¹Numeric Solve. Solve equation. Acceso con $\text{r}[4]$.

Actividad 1.1 *Calcula el valor de x_1, x_2, x_3 , del ejemplo anterior.*

Actividad 1.2 *Dibuja a mano una representación gráfica esquemática de la ecuación $e^x = \frac{1}{x}$ y determina una estimación del valor de la solución.*

Actividad 1.3 *Resuelve la ecuación $e^x = \frac{1}{x}$ usando los recursos de cálculo gráfico de la calculadora.*

Actividad 1.4 *Resuelve la ecuación $e^x = \frac{1}{x}$ usando la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora. Usa como estimación inicial $x_0 = 1$.*

Actividad 1.5 *Resuelve gráficamente la ecuación $e^x = \frac{1}{x^2}$.*

Actividad 1.6 *Resuelve la ecuación $e^x = \frac{1}{x^2}$ usando la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora. Usa como estimación inicial $x_0 = 1$. (Sol. $x = 0.70346742$)*

Actividad 1.7 *Resuelve gráficamente la ecuación $\ln x = \frac{1}{x}$*

Actividad 1.8 *Resuelve la ecuación $\ln x = \frac{1}{x}$ usando la aplicación de resolución numérica de ecuaciones de la calculadora. Usa como estimación inicial $x_0 = 1.5$. (Sol. $x = 1.7632228$)*

2 Aplicación del método con la calculadora

El cálculo de los sucesivos valores x_1, x_2, \dots , usando calculadoras convencionales puede ser bastante tedioso. En nuestro caso, la idea es construir la función

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

entonces podemos calcular los valores x_1, x_2, \dots , con una simple pulsación de tecla. Siguiendo con el ejemplo anterior, el procedimiento es como sigue:

1. Escribe en la pila la expresión de $f(x)$ y pulsa ENTER para obtener una copia.



- Aplica el comando DERVX para calcular $f'(x)$ y pulsa $[\div]$. Obtendrás en el Nivel 1 de la pila la expresión $f(x)/f'(x)$. Puedes ejecutar EVAL para intentar simplificar la expresión.

```

RAD R&Z HEX R= 'X'
{HOME}
2:
1:

$$\frac{X^2 \cdot e^X - X}{X^2 \cdot e^X + 1}$$

DERIV LIMIT DIFF GRAPH DERVX INTVX

```

- Para acabar de construir la expresión $x - f(x)/f'(x)$ carga x en la pila, ejecuta SWAP² para intercambiar el contenido del Nivel 1 y el Nivel 2 de la pila y resta. Resulta la expresión.

```

RAD R&Z HEX R= 'X'
{HOME}
2:
1:

$$X - \frac{X^2 \cdot e^X - X}{X^2 \cdot e^X + 1}$$

DERIV LIMIT DIFF GRAPH DERVX INTVX

```

- Ahora vamos a construir la función $G(x)$. Esto puedes realizarlo de varias formas. Por ejemplo, puedes cargar la expresión 'G(X)' en la pila, ejecutar SWAP y pulsar³ [=] para construir la expresión

```

RAD R&Z HEX R= 'X'
{HOME}
2:
1:

$$G(X) = X - \frac{X^2 \cdot e^X - X}{X^2 \cdot e^X + 1}$$

DERIV LIMIT DIFF GRAPH DERVX INTVX

```

y ejecutar el comando⁴ DEFINE.

- Una vez ejecutado el comando DEFINE, pulsa [VAR] para acceder al *área de variables* y verás que ha quedado definida la función $G(x)$.

²Tecla \blacktriangleright .

³Tecla \uparrow [W]

⁴Tecla \uparrow [2]

Ahora, para calcular las distintas iteraciones, sólo es preciso colocar el valor inicial en la pila y pulsar reiteradamente la tecla de función correspondiente.

	RAD	Fix	HEX	R= 'X'
5:				1.00000000
4:				0.53788284
3:				0.56627701
2:				0.56714258
1:				0.56714329

Si quieres guardar en la pila una copia del valor de las sucesivas aproximaciones, en cada iteración puedes pulsar [ENTER] para duplicar el valor antes de evaluar $G(x)$.

Actividad 2.1 *Aproxima la solución de la ecuación*

$$\ln(x) = \frac{1}{x}$$

con 5 decimales exactos usando el método de Newton-Raphson a partir del valor inicial $x_0 = 1.5$. Verifica la solución sustituyendo el valor en la ecuación. Calcula la solución de la ecuación usando el Numeric Solver. (Sol. 1.76322283)

Actividad 2.2 *Representa gráficamente la ecuación*

$$\ln x = \cos x.$$

¿Cuántas soluciones hay en el intervalo $(0, 6)$? Calcula las soluciones usando los recursos de cálculo contenidos en el menú [FCN] de la pantalla de gráficos. (Sol. $x = 1.30296400$)

Actividad 2.3 *Aproxima la solución de la ecuación*

$$\ln x = \cos x$$

con 5 decimales exactos usando el método de Newton-Raphson a partir del valor inicial $x_0 = 1.0$. Verifica la solución sustituyendo el valor en la ecuación. Calcula la solución de la ecuación usando el Numeric Solver.

Actividad 2.4 *Representa gráficamente la ecuación*

$$\ln x = \sin x$$

Usando [(X,Y)] estima el valor de la solución. Emplea el método de Newton-Raphson a partir del valor inicial estimado para aproximar la solución con 8 decimales. Verifica el resultado usando el Numeric Solver.