

Cálculo científico y técnico con
HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 3: **Aplicaciones**
Tema 3.2 **Determinación aproximada de
extremos: Método de Newton-Raphson**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Abril 2008, versión 1.2

1 Introducción

Supongamos que deseamos calcular los extremos relativos (máximos o mínimos) de una función $f(x)$, dos veces derivable. En ese caso, sabemos que los posibles extremos se producen en los llamados *puntos críticos*, esto es, en los valores de x que anulan la primera derivada.

Si x^* es un punto crítico, entonces la segunda derivada puede aclararnos si se trata de un máximo o un mínimo:

- Si $f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = x^*$.
- Si $f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = x^*$.

El método de Newton-Raphson es un método iterativo que nos permite aproximar los ceros de una función. Podemos, por lo tanto, aplicar el método a la función derivada para aproximar los puntos críticos de una función. Para ello, debemos considerar la ecuación

$$f'(x) = 0.$$

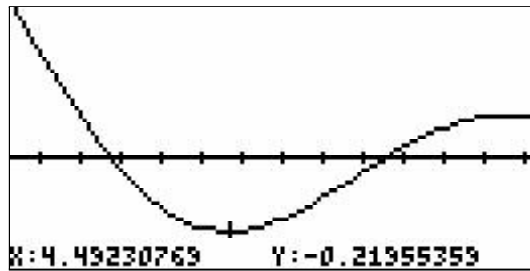
En este caso, partimos de una estimación inicial del punto crítico x_0 , y las siguientes aproximaciones se calculan de forma recurrente mediante la fórmula

$$x_{j+1} = x_j - \frac{f'(x_j)}{f''(x_j)}.$$

Supongamos, por ejemplo, que deseamos aproximar el mínimo de la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

en el intervalo $[2, 8]$. Si representamos la curva $y = f(x)$



vemos que, efectivamente, la función tiene un mínimo en el intervalo. El mínimo se alcanza aproximadamente para $x = 4.5$ vale aproximadamente $y_{\min} = -0.22$.

Calculamos

$$f'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2},$$

$$f''(x) = -\frac{\sin x}{x} - 2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{\sin x}{x^3},$$

y resulta la fórmula recurrente

$$x_{j+1} = x_j - \frac{\frac{\cos x_j}{x_j} - \frac{\sin x_j}{x_j^2}}{-\frac{\sin x_j}{x_j} - 2\frac{\cos x_j}{x_j^2} + 2\frac{\sin x_j}{x_j^3}}.$$

Las sucesivas aproximaciones toman los siguientes valores

$$\begin{aligned} x_0 &= 4.5, \\ x_1 &= 4.49339\ 97, \\ x_2 &= 4.49340\ 95, \\ x_3 &= 4.49340\ 95. \end{aligned}$$

De donde obtenemos el punto crítico

$$x^* = 4.49341.$$

Sustituyendo en la segunda derivada, resulta

$$f''(4.49341) = 0.21723358 > 0,$$

por lo tanto, se trata de un mínimo relativo. El valor del mínimo es

$$f(4.49341) = -0.21723363.$$

Observa que para calcular un extremo relativo tienes que seguir los siguientes pasos:

1. *Cálculo de puntos críticos.* Requiere el cálculo de la primera derivada y la resolución de la ecuación $f'(x) = 0$.
2. *Identificación de extremos.* Requiere el cálculo de la segunda derivada y la evaluación de la segunda derivada en los puntos críticos.
3. *Cálculo de los valores máximos y mínimos.* Requiere la evaluación de la función en los puntos críticos.

2 Aplicación del método con la calculadora

Puedes resolver el ejemplo anterior usando la calculadora mediante los siguientes pasos:

1. Fija el modo real exacto $\mathbb{R} = y$ y el modo angular en radianes.
2. En primer lugar, debes disponer de una estimación inicial para el punto crítico. Puedes obtenerla, por ejemplo, representando gráficamente la función en el intervalo de interés. En este ejemplo tomaremos $x_0 = 4.5$.
3. Carga la expresión de $f(x)$ en la pila.

```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
4:
3:
2:
1:          SIN(X)
              X
DERIV|LIMIT|DIFF|GRAPH|DERVX|INTVX

```

4. Pulsa ENTER para obtener una copia.

```

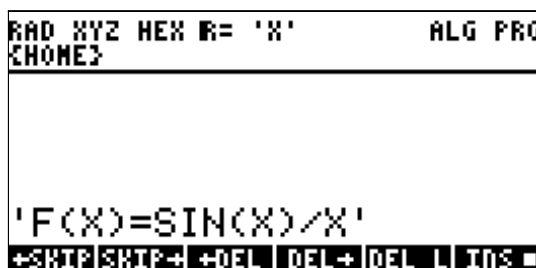
RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
2:          SIN(X)
              X
1:          SIN(X)
              X
EDIT|VIEW|STACK|RCL|PURGE|CLEAR

```

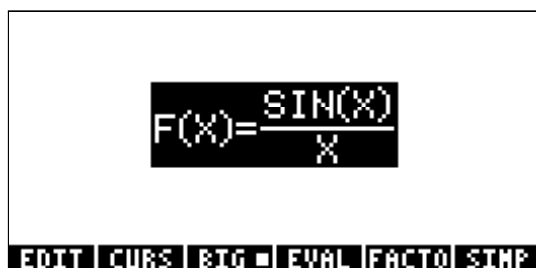
pulsa [▼] para acceder al editor de ecuaciones.



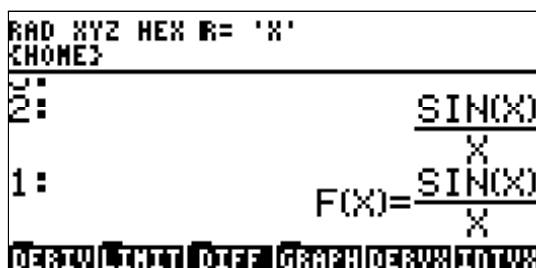
Ahora queremos escribir $F(x) =$ delante de la expresión seleccionada. Quizás la forma más rápida de hacerlo es pulsar [F1] para ejecutar EDIT y completar el trabajo en el editor de línea



Pulsa ENTER para volver al editor de ecuaciones



y pulsa nuevamente ENTER para cargar la expresión en la pila.



Ahora ejecuta el comando DEFINE¹ para construir la función. Pulsa [VAR] para acceder al área de variables y observa que la función se ha creado.

¹γ[2].



Posteriormente emplearemos esta función para calcular el valor de $f(x)$ en el punto crítico.

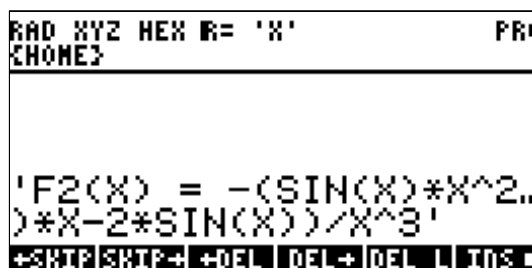
5. Vamos a calcular la primera derivada. Accede al menú de herramientas de cálculo y usa DERVX para calcular $f'(x)$



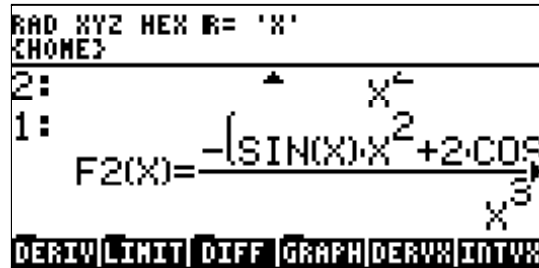
6. Ahora vamos a calcular la segunda derivada. Pulsa ENTER para duplicar $f'(x)$ y usa DERVX para calcular $f''(x)$.



7. Vamos a definir una función que nos permita evaluar la segunda derivada. Procedemos como antes, cargando la expresión de la segunda derivada en el editor de ecuaciones y pulsando EDIT para añadir $F2(x)=$



Pulsamos dos veces ENTER para cargar la expresión en la pila



y ejecutamos DEFINE. Cuando accedas al área de variables, verás las etiquetas correspondientes a F y F2



En el Nivel 1 de la pila tenemos la primera derivada. Usaremos la función F2 para clasificar el punto crítico.

8. Ahora vamos a construir la función de iteración

$$G(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

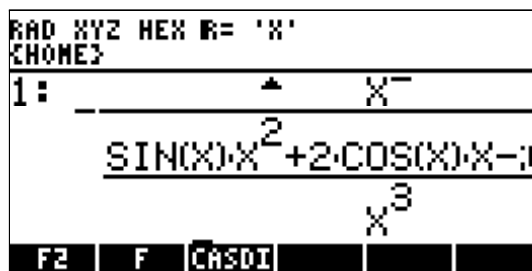
Empieza por cargar X en le Nivel 1 de la pila



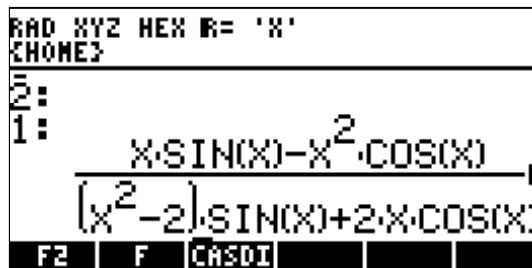
y pulsa F2 para obtener la expresión de la segunda derivada



pulsa [\div] para construir $\frac{f'(x)}{f''(x)}$



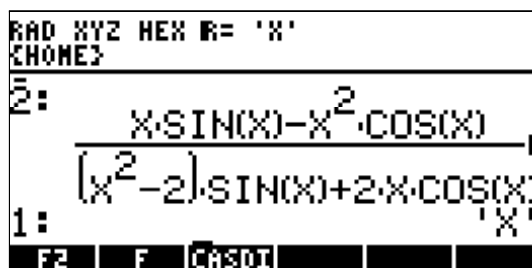
Puedes ejecutar EVAL para intentar simplificar la expresión



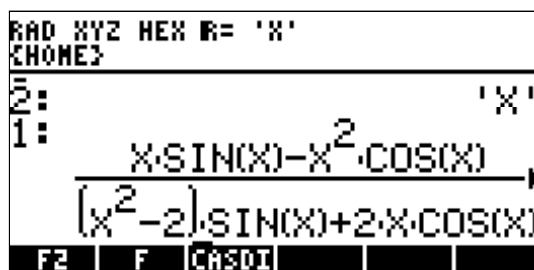
Ahora vamos a construir la expresión

$$x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

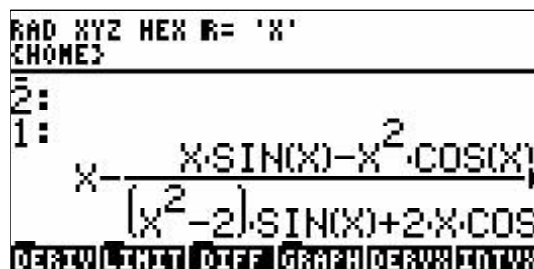
Carga X en el Nivel 1 de la pila,



pulsa [▶] para ejecutar SWAP e intercambiar el contenido del Nivel 1 y el Nivel 2.



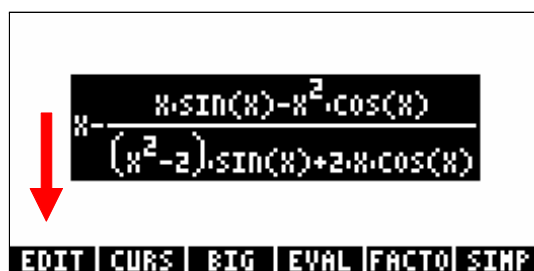
Finalmente, efectúa la resta.



Ahora tienes que definir la función

$$G(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

Pulsa [▼] para cargar la expresión en el editor de ecuaciones



y pulsa [F1] para ejecutar la opción [EDIT] del menú de herramientas



Escribe $G(x)=$ después del primer apóstrofo.

```
RAD XYZ HEX R= 'X'      ALG PRG
{HOME}
'G(X)=X-(X*SIN(X)-X^2...
X))/((X^2-2)*SIN(X)+2
*X*COS(X))'
```

Pulsa dos veces ENTER para cargar la expresión en la pila

```
RAD XYZ HEX R= 'X'
{HOME}
5:
2:
1:
G(X)=X- $\frac{X \cdot \sin(X) - X^2 \cdot \cos(X)}{(X^2 - 2) \cdot \sin(X) + 2 \cdot X \cdot \cos(X)}$ 
```

y ejecuta el comando DEFINE. Pulsa [VAR] y verifica que la función $G(x)$ se ha creado.

```
RAD XYZ HEX R= 'X'
{HOME}
5:
4:
3:
2:
1:
G | F2 | F | CASDI
```

- Ya estamos a punto para calcular el punto crítico, esto es, la solución de la ecuación

$$f'(x) = 0.$$

Supongamos que queremos determinar el punto crítico con 6 cifras decimales. Fija el modo numérico FIX 8. Carga el valor inicial 4.5 en la pila y pulsa ENTER para duplicarlo.

```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
5:
4:
3:
2: 4.50000000
1: 4.50000000
G F2 F [CASDI]

```

Pulsa [F1] para calcular el valor de la primera iteración.

```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
5:
4:
3:
2: 4.50000000
1: 4.49339971
G F2 F [CASDI]

```

10. Continúa de forma análogo, pulsando ENTER y [F1] hasta que no haya variación en el valor obtenido.

```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
5:
4: 4.50000000
3: 4.49339971
2: 4.49340946
1: 4.49340946
G F2 F [CASDI]

```

Has obtenido el punto crítico $x^* = 4.493409$.

11. Una vez determinado el punto crítico, usa F2 para clasificarlo

```

RAD XYZ HEX R= 'X'
[HOME]
5: 4.50000000
4: 4.49339971
3: 4.49340946
2: 4.49340946
1: 0.21723363
G F2 F [CASDI]

```

Obtenemos que el valor $f''(x^*)$ es positivo, por lo tanto, f tiene un mínimo relativo en $x = x^*$.

12. Finalmente, borramos el valor de $f''(x^*)$, duplicamos el valor de x^* y pulsamos [F3] para calcular $f(x^*)$.

RAD	XYZ	HEX	R= 'X'
[HOME]			
5:			4.500000000
4:			4.49339971
3:			4.49340946
2:			4.49340946
1:			-0.21723363

Por lo tanto el valor del mínimo² es $y_{\min} = -0.217234$.

Actividad 2.1 Representa gráficamente la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

en el intervalo $x \in [4, 10]$ y estima aproximadamente el valor del máximo relativo que la función tiene en ese intervalo. Aplica el método de Newton-Raphson con valor inicial $x_0 = 7.5$ para aproximar el máximo. Verifica el resultado con el comando [EXTR] del menú [FNC] de cálculo gráfico. (Sol. $x_{\max} = 7.72525$, $y_{\max} = 0.12837$)

Actividad 2.2 Representa gráficamente la función

$$f(x) = x^2 \cos x$$

en el intervalo $x \in [0, 7]$. Determina los extremos con [FCN][EXTR].

Actividad 2.3 Determina los extremos de la función

$$f(x) = x^2 \cos x$$

en el intervalo $x \in [0, 7]$ usando el método de Newton-Raphson. Toma los valores iniciales, 1.5, 4.5 y 6.5 para aproximar los correspondientes puntos críticos; usa la segunda derivada para ver si se trata de máximos o mínimos. (Sol. $x_{\max} = 1.07687$, $x_{\min} = 3.64359$, $x_{\max} = 6.57833$).

Actividad 2.4 Determina los extremos de la función

$$f(x) = x \cos(x)$$

en el intervalo $x \in [0, 7]$.

(Sol. $x_{\max} = 0.86033$, $x_{\min} = 3.425618$, $x_{\max} = 6.437298$).

²Es una curiosa coincidencia que en el punto crítico se cumpla $f(x^*) = -f''(x^*)$. De hecho, esta propiedad se cumple en todos los puntos críticos de f , pues si calculas las derivadas puedes obtener la relación $f''(x) = -f(x) - \frac{2}{x}f'(x)$. Como en los puntos críticos es $f'(x^*) = 0$, resulta $f(x^*) = -f''(x^*)$.