

Cálculo científico y técnico con
HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 3: **Aplicaciones**
Tema 3.5 **Cadenas de Markov**

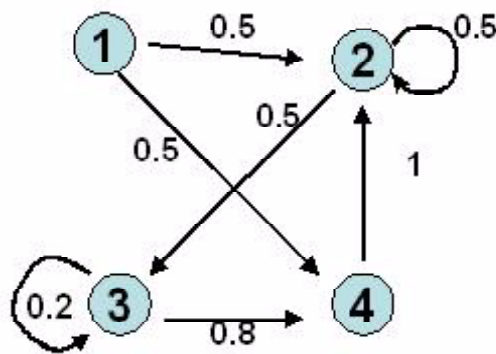
Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superior de Ingeniería de Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Abril 2008, versión 1.3

1 Introducción

1.1 Matriz de transición

Consideremos el siguiente grafo



donde los nodos P_1, P_2, P_2, P_4 , representan los estados de un sistema y los arcos las posibles transiciones. La variable X_k indica el estado del sistema en la etapa k . El arco $\overrightarrow{P_1 P_2}$ tiene asociado el valor 0.5, este número es el valor de la *probabilidad condicionada* de que el sistema evolucione al estado P_2 si actualmente está en el estado P_1 , esto es

$$\Pr(X_{k+1} = P_2 | X_k = P_1) = 0.5.$$

En general, definimos

$$m_{ij} = \Pr(X_{k+1} = P_i | X_k = P_j)$$

como la probabilidad de que el sistema evolucione al estado P_i si actualmente se encuentra en el estado P_j . En el grafo del ejemplo podemos observar

$$m_{22} = 0.5, \quad m_{24} = 1, \quad m_{43} = 0.8.$$

La *matriz de transición en una etapa* M recoge los valores m_{ij} .

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

La columna j de M contiene las probabilidades de transición *desde* P_j . Así vemos que la tercera columna indica que desde P_3 se puede permanecer en P_3 con probabilidad 0.2 o bien pasar a P_4 con probabilidad 0.8.

1.2 Vector de estado

La situación del sistema en la etapa k queda definida por un *vector de estado*

$$\mathbf{p}^{(k)} = \begin{pmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ p_3^{(k)} \\ p_4^{(k)} \end{pmatrix}$$

El vector de estado indica la probabilidad de que el sistema se encuentre en cada uno de los estados en la etapa k . Por ejemplo el vector de estado

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

indicaría que, inicialmente, el sistema puede encontrarse en estado P_2 o en P_3 con una probabilidad del 50%.

El vector estado en la etapa $k + 1$ puede calcularse multiplicando por la matriz de transición por el vector de estado $\mathbf{p}^{(k)}$, esto es

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = M \mathbf{p}^{(k)}.$$

Por ejemplo, si en la etapa $k = 3$ tenemos el vector de estado

$$\mathbf{p}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

El vector de estado en la etapa siguiente $k = 4$ es

$$\mathbf{p}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.175 \\ 0.325 \end{pmatrix}$$

Actividad 1.1 *Calcula manualmente el vector $\mathbf{p}^{(4)}$ del ejemplo anterior.*

1.3 Transición en n etapas

El vector de estado tras n etapas puede obtenerse multiplicando el vector de estado actual por M^n

$$\mathbf{p}^{(k+n)} = M^n \mathbf{p}^{(k)},$$

la *matriz de transición en n etapas* es, por lo tanto, $M^{(n)} = M^n$. Para nuestro ejemplo, la matriz de transición en 2 etapas es

$$M^{(2)} = M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & 0.8 & 0.5 \\ 0.25 & 0.35 & 0.04 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.16 & 0 \end{pmatrix}$$

Actividad 1.2 *Calcula manualmente la matriz M^2 del ejemplo anterior.*

Actividad 1.3 *Calcula el vector de estado $\mathbf{p}^{(4)}$ si el sistema se encuentra inicialmente en P_1 , es decir si $\mathbf{p}^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T$.*

1.4 Estado estacionario

Cuando partiendo desde cualquier vector de estado inicial el sistema alcanza, a largo plazo, siempre un mismo vector de estado, decimos que el sistema ha alcanzado el *vector de estado estacionario*. Si representamos por $\mathbf{p}^{(\infty)}$ el vector de estado estacionario, resulta

$$\mathbf{p}^{(\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n \mathbf{p}^{(0)}.$$

Para que el límite anterior exista, las potencias de la matriz de transición deben converger a una matriz $M^{(\infty)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = M^{(\infty)}.$$

La matriz $M^{(\infty)}$ tiene una estructura peculiar: todas sus columnas son iguales al vector de estado estacionario $\mathbf{p}^{(\infty)}$.

Para la matriz de transición

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

podemos estimar M^∞ calculando una potencia suficiente grande de M , en particular, si calculamos la potencia 30 de M , resulta

$$M^\infty \simeq M^{30} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ .470589 & .470588 & .470589 & .470588 \\ .294118 & .294118 & .294117 & .294118 \\ .235293 & .235295 & .235294 & .235294 \end{pmatrix}$$

Obtenemos el vector de estado estacionario

$$\mathbf{p}^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.47059 \\ 0.29412 \\ 0.23529 \end{pmatrix}.$$

2 Resolución con la calculadora

2.1 Potencias de matrices

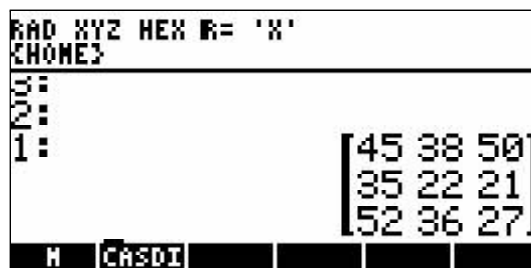
La calculadora nos permite calcular potencias enteras de matrices con facilidad, por lo tanto, es una buena herramienta para estudiar la transición en cadenas de Markov. Para calcular la potencia de una matriz, cargamos la matriz en el Nivel 2 de la pila, el exponente en el Nivel 1 y pulsamos la tecla $[y^x]$. Por ejemplo, para calcular la potencia 3 de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

disponemos la pila como sigue

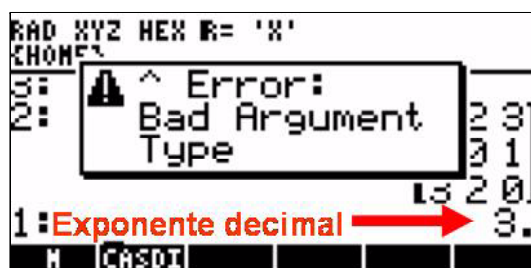


y pulsamos $[y^x]$. El resultado es



Actividad 2.1 *Calcula manualmente la matriz A^3 .*

Importante Asegúrate que el exponente es un número exacto, esto es, la calculadora debe estar en modo exacto a la hora de cargar el exponente en la pila. En caso contrario se produce un error¹.



Otra forma de transformar un número aproximado en exacto es usando la función $\rightarrow Q$ del catálogo.

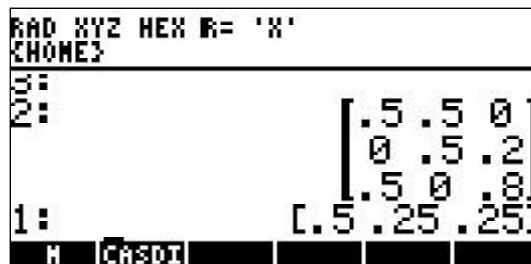
Actividad 2.2 *Usando la función $\rightarrow Q$ del catálogo, transforma en exactos los valores 3.0, 2.5, 1.234.*

2.2 Producto de vectores y matrices

La calculadora permite multiplicar matrices por vectores, en ese caso los vectores son interpretados como matrices columna. Para calcular

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.175 \\ 0.450 \end{pmatrix}$$

cargamos la matriz en el nivel 2 de la pila y el vector en el nivel 1

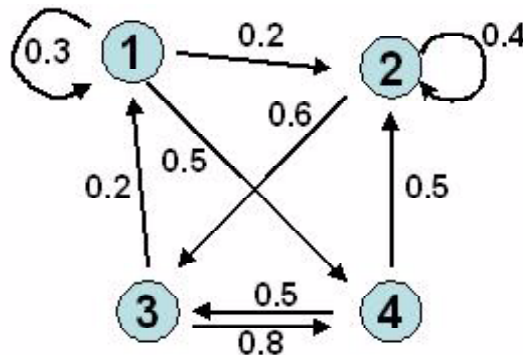


¹En el modelo Hp50g, parece que este problema ya se ha solucionado.

pulsamos [×] y se obtiene



Actividad 2.3 Determina la matriz de transición del siguiente grafo



Si el vector de estado inicial es $\mathbf{p}^{(0)} = (0.1, 0.2, 0.5, 0.2)^T$, calcula los vectores de estado $\mathbf{p}^{(1)}$ y $\mathbf{p}^{(5)}$. Calcula el vector de estado estacionario $\mathbf{p}^{(\infty)}$.

3 Soluciones

Actividad 1.3

$$\mathbf{p}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ .3875 \\ .2725 \\ .34 \end{pmatrix}$$

Actividad 2.3

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.13 \\ 0.20 \\ 0.22 \\ 0.45 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.091687 \\ 0.283645 \\ 0.322313 \\ 0.302355 \end{pmatrix}.$$

Calculando la potencia 10 de la matriz, resulta

RAD XYZ HEX R~ 'X'				
CH0ME3				
C	10	0	0	0
1:	0.0919	0.0919	0.0919	0.0919
	0.2833	0.2833	0.2833	0.2833
	0.3216	0.3216	0.3216	0.3216
	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032
N	CRSDI			