Cálculo científico y técnico con HP49g/49g+/48gII/50g
Módulo 3 **Aplicaciones**
Tema 3.3 **Sistemas de ecuaciones lineales: regla de Cramer**

Francisco Palacios
Escuela Politécnica Superiror de Ingeniería Manresa
Universidad Politécnica de Catalunya
Dep. Matemática Aplicada III

Abril 2008, versión 1.3

1 Regla de Cramer

1.1 Descripción del método

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, puede escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

o de forma abreviada

$$Ax = b.$$

donde:

- A es la matriz de coeficientes.
- x es un vector columna de incógnitas.
- b es un vector columna de términos independientes.

El *sistema es de Cramer* si tiene tantas ecuaciones como incógnitas, en ese caso la matriz de coeficientes A es una matriz cuadrada.

Un sistema de ecuaciones es *compatible determinado* si tiene solución única. Un sistema de Cramer es compatible determinado si y sólo si

$$\Delta = \det A \neq 0.$$

En ese caso, definimos la matriz A_j como la que se obtiene a partir de A sustituyendo la columna j por el vector b, esto es, si c_j es la columna j de A,

$$A = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \qquad c_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

entonces la matriz A_j tiene la siguiente estructura

$$A_j = (c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \ldots, c_n).$$

Representamos por Δ_j el determinante de A_j

$$\Delta_j = \det A_j = \det(c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}, b, c_{j+1}, \ldots, c_n).$$

Entonces la solución del sistema viene dado por la denominada *regla de Cramer*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Ejemplo 1.1 *Notación matricial y regla de Cramer.*

Tomemos por ejemplo el sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

La expresión matricial es

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz de coeficientes toma el valor

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$$

por lo tanto, el sistema es compatible determinado. Calculamos

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -24,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 9,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

De donde obtenemos la solución del sistema

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -\frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{-1}{2}.$$

1.2 Resolución con la calculadora

El método de Cramer es adecuado para sistemas de pequeña dimensión. En la resolución con la calculadora, emplearemos algunos comandos de manipulación de matrices

- `DET` Calcula el determinante, está en [MATRICES][OPER].
- `COL+` Añade una columna a una matriz.
- `COL-` Elimina una columna de una matriz.
- `CSWP` Intercambia dos columnas.

Para escribir los comandos [COL+], [COL–] y [CSWP] podemos emplear el soft-menú [MATRICES][CREAT][COL].

Actividad 1.1 *Accede al menu de herramientas para matrices*[1] *y localiza los comandos* [DET], [COL+], [COL–] y [CSWP].

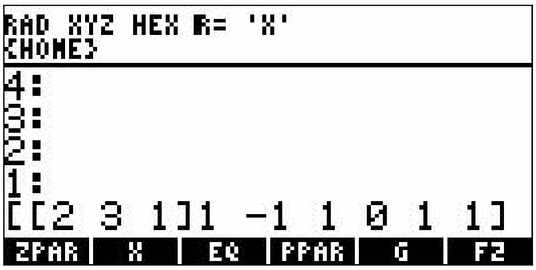
Vamos a resolver el sistema del ejemplo anterior

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix},$$

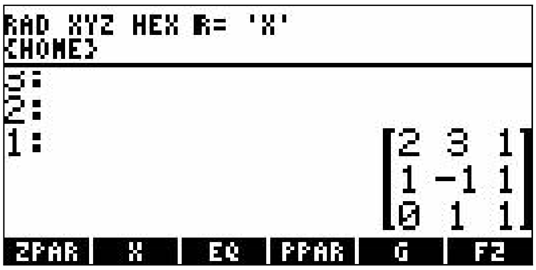
realiza los siguientes pasos.

[1] Tecla ↰[5].

1. Entra la matriz de coeficientes en la pila, ya sea mediante el editor de matrices[2] [MTRW], o bien directamente en la forma



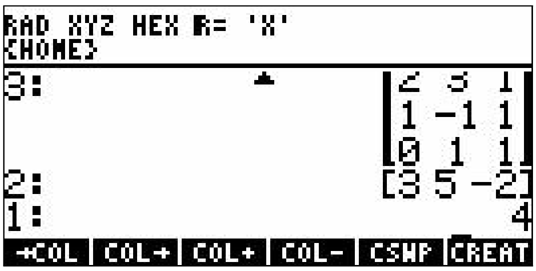
Después de pulsar ENTER, obtendrás



2. Guarda la matriz de coeficientes con el nombre A.

3. Carga A en la pila y ejecuta DET[3], el resultado es -6. Guarda el valor del determinante con el nombre D.

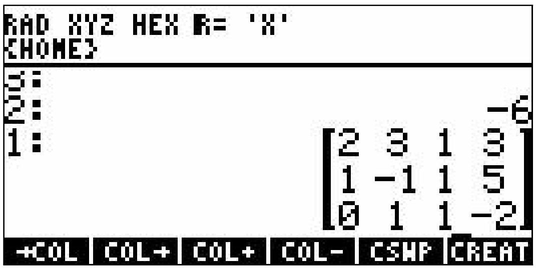
4. Crea un vector con los términos independientes, y usa el comando [COL+] para formar la matriz ampliada. Para ello carga en Nivel 3 de la pila la matriz A, en el Nivel 2 un vector con los elementos de b y en el Nivel 1 el índice de posición para la nueva columna, en nuestro caso 4



Después de ejecutar [COL+], obtendrás la matriz ampliada.

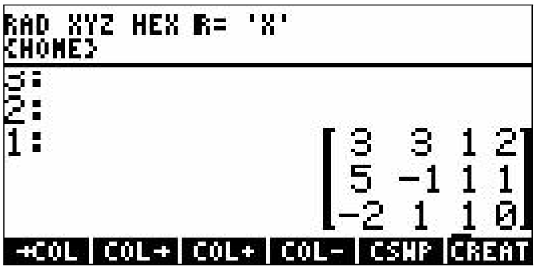
[2]Tecla ↰(4,3)

[3]Puedes obtener el comando DET en [MATRICES][OPER].

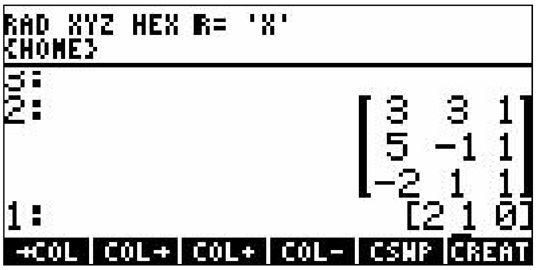


Guarda esta matriz con el nombre AB.

5. Vamos a calcular Δ_1. Carga la matriz ampliada AB en la pila, carga también los índices de las columnas a intercambiar, en nuestro caso 1 y 4 y ejecuta[CSWP]. Obtendrás la siguiente matriz

   Elimina la última columna con 4 [COL–], y obtendrás A_1, matriz que se obtiene sustituyendo en A la primera columna por la columna b de términos independientes.

6. Borra la columna extraída y ejecuta [DET], el resultado es $\Delta_1 = -24$. Carga el valor Δ, guardado en D y calcula $x_1 = -4$.

7. De forma análoga puedes obtener Δ_2 y Δ_3.

Actividad 1.2 *Calcula el valor de x_2 y x_3 siguiendo el procedimiento indicado.*

Actividad 1.3 *Resuelve el sistema usando la regla de Cramer*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

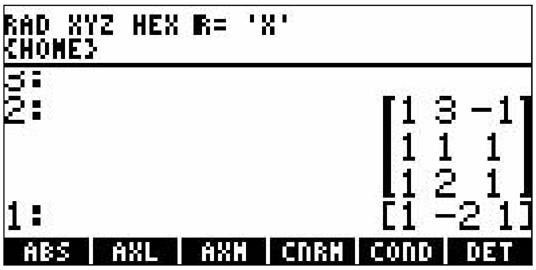
(*Sol.* $x_1 = 35$, $x_2 = -13$, $x_3 = -7$)

2 Resolución de sistemas usando la matriz inversa

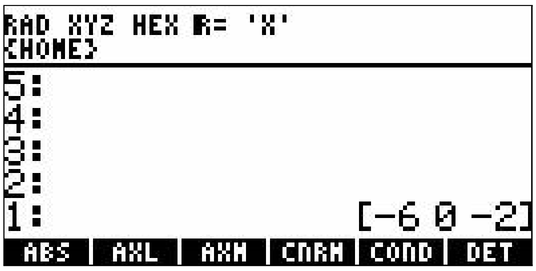
La calculadora nos permite obtener la inversa de una matriz con la tecla [$1/x$]. Por otra parte, cuando multiplicamos una matriz por un vector, la calculadora considera el vector como una matiz columna, es decir, para calcular el producto

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

cargamos la matriz y después el vector,



pulsamos entonces [$\times$] y obtenemos el resultado en forma de vector.



Podemos combinar estos recursos para resolver el sistema $Ax = b$. Obviamente, si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible y podemos despejar x premultiplicando por A^{-1},

$$Ax = b,$$

$$A^{-1}(Ax) = A^{-1}b,$$

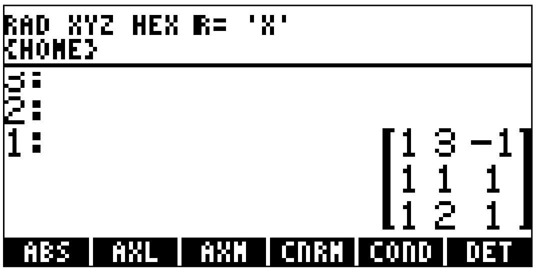
$$\overbrace{\left(A^{-1}A\right)}^{I_n} x = A^{-1}b$$
$$x = A^{-1}b.$$

Ejemplo 2.1 *Resolución de sistema lineal usando la matriz inversa.*

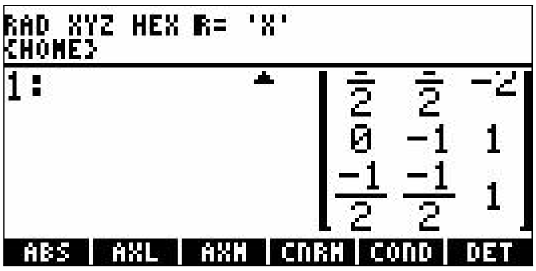
Para el resolver el sistema

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

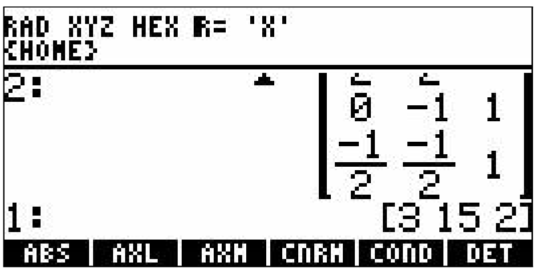
1. Carga la matiz de coeficientes A en la pila.



2. Pulsa [1/x] y obtendrás la matriz inversa.



3. Carga en la pila el vector de términos independientes [3,15,2]



y multiplica.

4. El resultado es la solución del sistema.

Actividad 2.1 *Resuelve el sistema usando la regla de Cramer*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Verifica el resultado usando la matriz inversa
(*Sol.* $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = \frac{7}{12},$)

Actividad 2.2 *Resuelve el sistema usando la regla de Cramer*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

Esta vez, en usa el editor de matrices y para modificar la matriz de coeficientes y calcular los determinantes Δ_j. Verifica el resultado usando la matriz inversa
(*Sol.* $x_1 = \frac{13}{4}, x_2 = -\frac{7}{4}, x_3 = -\frac{7}{4}$)